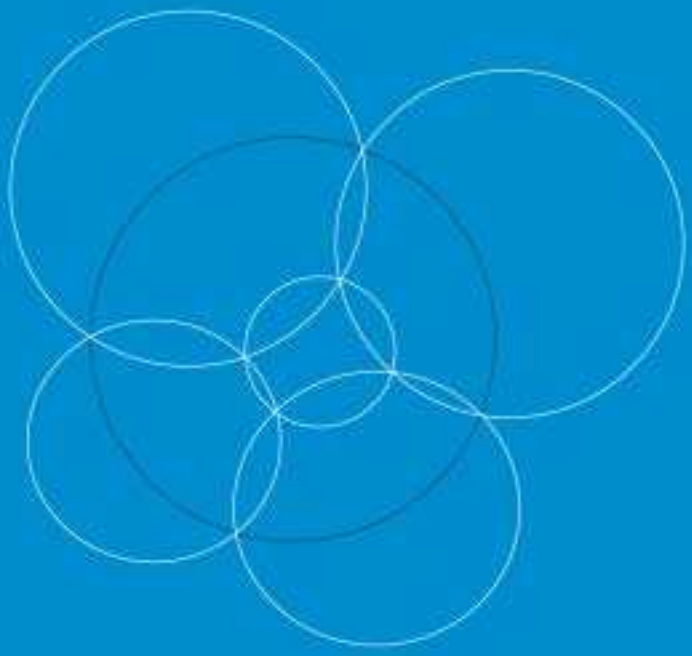
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Géométrie

Michèle Audin



EDP SCIENCES

GÉOMÉTRIE

Michèle Audin

EDP SCIENCES

17 avenue de Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Michèle Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur
et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr
Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

ISBN : 2-86883-883-9

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© 2006, EDP Sciences

TABLE DES MATIÈRES

Ceci est un livre... 1

I. Géométrie affine 7
I.1. Le postulat des parallèles 7
I.2. Espaces affines 8
I.3. Applications affines 16
I.4. Trois théorèmes de géométrie plane 26
I.5. Appendice : rappels succincts sur les barycentres 29
I.6. Appendice : notion de convexité 31
I.7. Appendice : coordonnées cartésiennes 33
Exercices et problèmes 35

II. Géométrie euclidienne, généralités 51
II.1. Espaces euclidiens 51
II.2. Structure des isométries 55
II.3. Groupe orthogonal 60
Exercices et problèmes 67

III. Géométrie euclidienne plane 73
III.1. Angles 73
III.2. Isométries et déplacements du plan 85
III.3. Similitudes planes 89
III.4. Inversions et faisceaux de cercles 94
Exercices et problèmes 110

IV. Constructions à la règle et au compas 127
IV.1. La règle du jeu 128
IV.2. Les nombres constructibles 130
IV.3. Applications à des problèmes de construction 133
IV.4. La question des polygones réguliers 134
IV.5. Remarques supplémentaires 138
Exercices et problèmes 138

V. Géométrie euclidienne dans l'espace 143
V.1. Isométries et déplacements de l'espace 143
V.2. Produit vectoriel, calculs d'aires 147
V.3. Sphères, triangles sphériques 151
V.4. Polyèdres, formule d'Euler 153
V.5. Polyèdres réguliers 156
Exercices et problèmes 161

VI. Géométrie projective 177
VI.1. Espaces projectifs 177
VI.2. Sous-espaces projectifs 179
VI.3. Liaison affine/projectif 181
VI.4. Dualité projective 187
VI.5. Homographies 190
VI.6. Birapport 196
VI.7. Droite projective complexe, groupe circulaire 200
Exercices et problèmes 206

VII. Coniques et quadriques 221
VII.1. Quadriques et coniques affines, généralités 221
VII.2. Classification et propriétés des coniques affines 228
VII.3. Quadriques et coniques projectives 239
VII.4. Birapport sur une conique et théorème de Pascal 247
VII.5. Quadriques affines et géométrie projective 250
VII.6. Cercles, inversions, faisceaux de cercles 259
VII.7. Rappels sur les formes quadratiques 265
Exercices et problèmes 276

VIII. Courbes, enveloppes et développées 291
VIII.1. Enveloppe d'une famille de droites dans le plan 293
VIII.2. Courbure d'une courbe plane 299
VIII.3. Développées 301
VIII.4. Appendice : rappels sur les courbes paramétrées 302
Exercices et problèmes 305

IX. Surfaces dans l'espace 315
IX.1. Exemples de surfaces dans l'espace 315
IX.2. Géométrie différentielle des surfaces de l'espace 318
IX.3. Propriétés métriques des surfaces 331
IX.4. Appendice : quelques formules 341
Exercices et problèmes 343

Indications pour les exercices 349
Chapitre I 349
Chapitre II 355
Chapitre III 359
Chapitre IV 371
Chapitre V 371
Chapitre VI 381
Chapitre VII 387
Chapitre VIII 396
Chapitre IX 400

Bibliographie 407

Index 411

CECI EST UN LIVRE...

> Je me souviens que j'ai plusieurs fois essayé de me servir d'une règle à calcul, et que plusieurs fois aussi j'ai commencé des manuels de maths modernes en me disant que si j'allais lentement, si je lisais toutes les leçons dans l'ordre en faisant les exercices et tout, il n'y avait aucune raison pour que je cale.
>
> Georges Perec, *in* [**37**].

Une première version de ce livre est parue en 1998. Puis une deuxième, en anglais, en 2003. La présente édition est destinée aux étudiants de licence (L3) et de « master » de mathématiques ainsi qu'à celles et ceux qui préparent le CAPES ou l'agrégation. Elle s'adresse donc à des lecteurs qui ont étudié de la géométrie de façon plus ou moins expérimentale au lycée et de l'algèbre linéaire de façon plus formelle pendant deux années d'université. Elle est issue de l'enseignement que j'ai donné aux étudiants de ces filières et des enseignements que j'en ai moi-même tirés.

Deux idées directrices

La première idée est de fournir un exposé rigoureux, basé sur la définition d'un espace affine *via* l'algèbre linéaire, mais qui n'hésite pas à être terre à terre et élémentaire. C'est pourquoi j'ai souhaité expliquer comment l'algèbre linéaire peut

être utilisée en géométrie élémentaire et en même temps montrer de la « vraie » géométrie : des triangles, des sphères, des polyèdres, des angles inscrits, des inversions, des paraboles...

Il est en effet très satisfaisant pour les mathématiciens de définir un espace affine comme un ensemble de points sur lequel opère un espace vectoriel (et c'est ce que je fais ici) mais cette approche formelle, si élégante soit-elle, ne doit pas occulter l'aspect « phénoménologique » de la géométrie élémentaire, son esthétique propre : oui, le théorème de Thalès exprime simplement que les projections sont des applications affines, non, il n'est pas nécessaire d'orienter un plan euclidien pour y définir des angles orientés... tout ça n'empêche ni le cercle d'Euler d'être tangent aux cercles inscrit et exinscrits, ni les droites de Simson d'envelopper une hypocycloïde à trois rebroussements !

Ce parti pris oblige à aborder certains sujets sous des éclairages différents. Par exemple, les inversions planes traitées de façon naïve au chapitre III font des retours plus abstraits dans le chapitre de géométrie projective et dans celui sur les quadriques. De même l'étude des coniques projectives au chapitre VII vient après celle des coniques affines... alors qu'il aurait été plus simple — au moins pour l'auteur ! — de tout déduire du traitement projectif.

La deuxième idée est de produire un texte ouvert : les ouvrages destinés aux étudiants préparant le CAPES sont trop souvent fermés sur le programme de ce concours, ce qui ne donne pas l'impression que les mathématiques soient une science en mouvement (ni en fête, d'ailleurs !). Malgré l'aspect limité du programme traité ici, j'espère intéresser *aussi* des lectrices plus avancées.

Enfin, les mathématiques sont une activité humaine comme les autres et une bonne partie du contenu du livre ressortit à la culture la plus classique puisqu'on y évoque notamment l'arc-en-ciel selon Newton, les sections coniques d'Apollonius, la difficulté à dessiner des cartes de la Terre, la géométrie d'Euclide et le postulat des parallèles, la mesure des latitudes et des longitudes, les problèmes de perspective des peintres de la Renaissance(1), les polyèdres platoniciens. J'ai essayé de le montrer dans la façon de l'écrire(2) et dans la bibliographie.

Quoi de neuf ?

Ce n'est pas juste une nouvelle édition. J'ai corrigé de nombreuses erreurs figurant dans les éditions précédentes (en français et en anglais), inclus quelques

(1) Le traité de géométrie de Dürer [**18**] est destiné aux amateurs d'art, pas aux mathématiciens.
(2) La façon d'écrire les mathématiques fait aussi partie de la culture. Comparer les « onze propriétés de la sphère » de [**27**] et les « quatorze façons de décrire la pluie » de [**19**].

additifs (écrits pour la traduction en anglais) et un bref nouveau chapitre sur les constructions à la règle et au compas (tout au long des exercices, j'ai aussi un peu plus insisté sur les problèmes de construction).

Les prérequis

Il s'agit du programme des deux premières années de la licence, algèbre linéaire et formes quadratiques[3], un peu d'algèbre (groupes, sous-groupes, opérations de groupes...)[4], la définition d'une application différentiable et un peu de topologie des espaces vectoriels normés (c'est-à-dire de $\mathbf{R}^n$), dans le dernier chapitre, des avatars du théorème des fonctions implicites, pour un ou deux exercices avancés seulement, un peu d'analyse complexe.

Les exercices

Chaque chapitre se termine par des exercices. J'en ai ajouté une bonne cinquantaine pour cette édition. Il faut faire des exercices. Il faut *chercher* les exercices. Un exercice n'est pas quelque chose dont il faut connaître « la » solution pour la réciter à un jury. Aucune notion ne peut être comprise ou assimilée sans un minimum de pratique, de recherche, d'*échecs*. Un exercice sur lequel on n'a pas « séché » est un exercice inutile.

Avec beaucoup de réticences, j'ai quand même ajouté les solutions de nombreux exercices.

Remarque bibliographique

La difficulté que j'avais à conseiller des livres aux étudiants est une des raisons d'être de ce texte : il y a beaucoup de livres de géométrie, mais ceux qui sont bons sont trop difficiles, trop abstraits ou trop volumineux pour ces étudiants (je pense en particulier à [**3, 22, 5**]).

Il n'en reste pas moins qu'il y a quelques bons livres, à tous les niveaux... et que j'espère que celui-ci incitera les lecteurs à aller regarder, par exemple, outre

[3] Il y a quand même un paragraphe de rappels des propriétés des formes quadratiques dans le chapitre sur les coniques.

[4] Les groupes de transformations sont l'essence-même de la géométrie. J'espère que cette idéologie transparaît dans ce texte. Pour ne pas masquer cette essence, j'ai choisi de ne *pas* écrire de paragraphe de sorites généraux sur les opérations de groupe. On consultera par exemple [**39, 4, 24, 5**].

les trois ouvrages déjà cités, [**15, 14, 46, 49**]. J'ai utilisé aussi de beaux livres de terminale (des cinquante dernières années), comme [**16, 30, 34, 47**].

Remerciements

Je remercie d'abord tous ceux et celles, parents, enseignants, amis, collègues et étudiants, qui ont contribué, depuis si longtemps, à me faire aimer les mathématiques présentées dans ce livre.

C'est Daniel Guin qui m'a décidée à l'écrire. Puis, Nicole Bopp a lu avec beaucoup d'attention et critiqué une toute première version des trois premiers chapitres. C'est grâce à eux deux que ce livre existe. Je les en remercie.

Une version préliminaire a été utilisée par les étudiants strasbourgeois pendant l'année universitaire 1997-98. Puis le livre corrigé a été publié, plus ou moins bien, diffusé, plus ou moins bien aussi, mais il a visiblement trouvé un public. Il y a eu ensuite la traduction en anglais et, à chaque étape, de nouvelles suggestions, critiques, remarques, corrections, apportées par les collègues ou les étudiants qui utilisaient telle ou telle version. Et maintenant cette nouvelle édition, fruit de toutes ces contributions. Beaucoup de monde à remercier.

Ici, Pierre Baumann, Laure Blasco, Olivier Debarre, Paul Girault, Gilles Halbout, Vilmos Komornik(5), Jean-Yves Merindol. Ailleurs, Ana Cannas da Silva, Michel Coste(6), Jérôme Germoni, Daniel Perrin(7), Emma Previato, François Rouvière(8). Ici ou là, tous ceux que j'ai oubliés. Plus, encore ici, Vincent Blanlœil, Mihai Damian, Ilia Itenberg et Nathalie Wach pour des exercices supplémentaires. Et encore, tous les étudiants, plus particulièrement Nadine Baldensperger, Régine Barthelmé, Martine Bourst, Sophie Gérardy, Catherine Goetz, Mathieu Hibou, Étienne Mann, Nicolas Meyer, Myriam Oyono-Oyono, Magali Pointeaux, Sandrine Zitt et tous les agrégatifs de ces quelques dernières années, mais enfin, vraiment, tous les étudiants. Enfin Alice Gaertig pour sa détermination à trouver « où était le photographe », Myriam Audin et Juliette Sabbah(9) pour leur aide

(5) C'est avec plaisir que j'inclus sa courte et élégante démonstration du théorème d'Erdős–Mordell (exercice III.22).

(6) Autour du théorème de Witt.

(7) Son théorème des six birapports, popularisé par la première édition, a obtenu un succès certain auprès des étudiants — tout en énervant pas mal de mes collègues, vexés, comme j'avoue l'avoir été, de ne pas l'avoir inventé eux-mêmes.

(8) Grâce à qui un parfum de lavande agrémente cette édition.

(9) Qui a même redessiné certaines des figures.

à la rédaction des exercices sur les caustiques. Je les remercie tous et toutes très chaleureusement.

♢
Pour
ce livre,
j'ai utilisé,
comme toujours,
les « paquets » LaTeX 2_ε
de la Société mathématique
de France. Je ne peux me re-
mercier ni pour avoir écrit et tapé ce
texte ni pour avoir résolu la plupart des
quatre cent onze exercices et « dessiné »
les cent quatre vingt-quinze figures
qu'il contient, mais je peux
remercier Claude Sabbah
pour son aide singu-
lière, stylistique,
technique, lo-
gistique,
etc.
♢

I

GÉOMÉTRIE AFFINE

Un espace affine est un ensemble de points, il contient des droites, des plans, et la géométrie affine[1] discute, par exemple, des relations entre ces points et ces droites (points alignés, droites parallèles ou concourantes...). Pour définir ces objets et décrire leurs relations, on peut :

– énoncer une liste d'axiomes, d'incidence principalement, comme « par deux points passe une droite et une seule ». C'est la voie d'Euclide (et plus récemment de Hilbert). Même si la démarche et *a fortiori* les axiomes eux-mêmes n'y sont pas explicités, c'est cette méthode qui est utilisée actuellement dans l'enseignement secondaire français ;

– décider que l'essentiel est que deux points déterminent un *vecteur* et tout définir à l'aide de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire par les axiomes définissant les espaces vectoriels.

J'ai choisi de développer ici la *deuxième* méthode, parce qu'elle est plus abstraite et plus nette, bien sûr, mais surtout parce que je crois qu'il est temps, en licence de mathématiques, de montrer aux étudiants que l'algèbre linéaire qu'on leur a enseignée pendant deux ans « sert » à quelque chose !

I.1. Le postulat des parallèles

Mais, pour commencer, je vais rappeler quelques aspects de la *première* méthode. Au commencement, il y a donc les axiomes d'Euclide, qui établissent des relations entre des objets appelés « points » et d'autres appelés « droites ». Par exemple,

[1] Il s'agit ici de géométrie affine « pure » au sens où il n'y a ni distance, ni angle, ni perpendiculaires, ceux-ci appartenant à la géométrie euclidienne, qui fera l'objet des chapitres suivants.

Postulat I.1.1. *Par deux points passe une droite et une seule.*

Les points sont sur les droites, les droites se coupent en des points. Pour ce qui va nous intéresser ici, deux droites qui ne se rencontrent pas (ou sont confondues) sont dites *parallèles* (notation $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$). Et il y a un des axiomes d'Euclide, le célèbre « cinquième postulat », que l'on peut formuler ainsi (ce n'est pas la formulation d'Euclide, mais elle lui est équivalente) :

Postulat I.1.2. *Par un point hors d'une droite, il passe une unique droite parallèle à cette droite.*

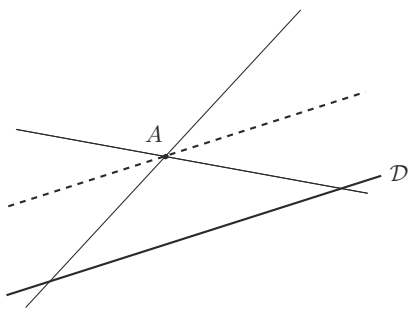


Figure 1. Le postulat des parallèles

Si ce cinquième postulat est célèbre, c'est parce que son indépendance des autres est à la source des géométries non-euclidiennes. Il est intéressant de remarquer que ce cinquième postulat a pour conséquence :

Proposition I.1.3. *La relation « être parallèle à » est une relation d'équivalence entre les droites du plan.*

Démonstration. Par définition, elle est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. On suppose que trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont telles que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}''$, on veut montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont parallèles. Supposons donc que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$ ne soit pas vide, soit $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$. La droite $\mathcal{D}'$ passe par A, elle est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}''$, donc on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}''$, grâce à l'unicité dans le cinquième postulat. $\square$

I.2. Espaces affines

Je m'arrêterai là pour le moment. Passons maintenant à l'algèbre linéaire. Voici la définition d'un espace affine.

Définition I.2.1. Un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'*espace affine* par la donnée d'un espace vectoriel[(2)] E et d'une application Θ qui associe un vecteur de E à tout couple de points de $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (A, B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

telle que

– pour tout point A de $\mathcal{E}$, l'application partielle $\Theta_A : B \mapsto \overrightarrow{AB}$ soit une bijection de $\mathcal{E}$ sur E,

– pour tous points A, B et C de $\mathcal{E}$, on ait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles).

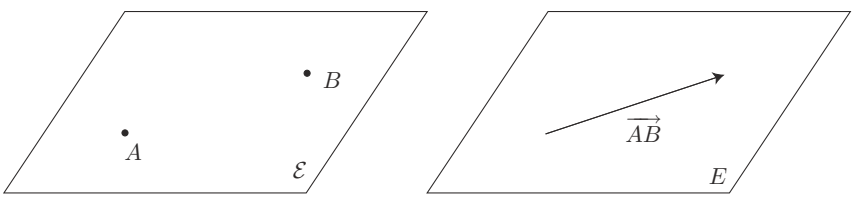


Figure 2

L'espace vectoriel E est la *direction* de $\mathcal{E}$, les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés *points*, on appelle *dimension* de $\mathcal{E}$ la dimension de l'espace vectoriel E qui le dirige.

Exemples I.2.2

(1) Avec cette définition, l'ensemble vide est un espace affine (dirigé par n'importe quel espace vectoriel) dont il est sage de convenir qu'il n'a pas de dimension.

(2) Tout espace vectoriel a une structure naturelle[(3)] d'espace affine : l'application $\Theta : E \times E \to E$ est simplement celle qui, au couple (u, v), associe le vecteur $v - u$.

(3) Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux espaces affines dirigés respectivement par E_1 et E_2, le produit cartésien $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ est un espace affine dirigé par $E_1 \times E_2$: l'application

$$\Theta : (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \times (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \to E_1 \times E_2$$

[(2)] C'est un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique 0 que je ne précise pas pour ne pas alourdir les définitions. Les lectrices peuvent imaginer que ce corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

[(3)] Elle est *naturelle* parce qu'elle est définie par la seule structure d'espace vectoriel (sans autre choix). Il serait plus exact, mais moins naturel (!) de dire qu'elle est « canonique ».

est celle qui, au couple $((A_1, A_2), (B_1, B_2))$, associe le couple de vecteurs $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2})$.

Propriétés

La relation de Chasles donne directement $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$ puis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

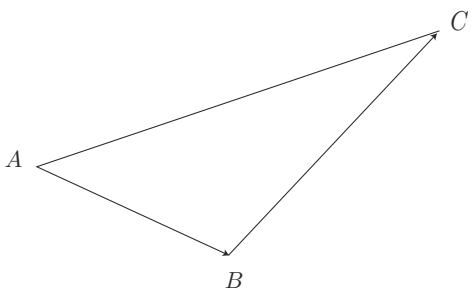


Figure 3. Relation de Chasles

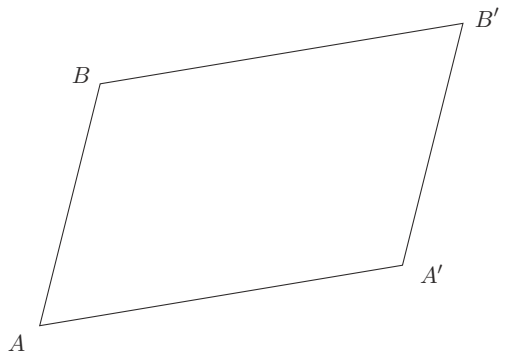


Figure 4. Règle du parallélogramme

Règle du parallélogramme

Elle dit que les deux égalités $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ sont équivalentes. Elle se démontre en appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'}.$$

Quand l'une des deux égalités est vérifiée, on dit que $AA'B'B$ est un *parallélogramme*.

Remarque I.2.3. Si A est un point de l'espace affine $\mathcal{E}$ et si u est un vecteur de l'espace vectoriel E qui le dirige, l'unique point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$ est parfois noté

$$B = A + u.$$

Cette notation est cohérente puisqu'on a

$$(A + u) + v = A + (u + v)$$

(c'est une traduction de la relation de Chasles). On en trouvera une justification dans l'exercice I.63.

Vectorialisé d'un espace affine

En fixant un point A d'un espace affine $\mathcal{E}$, on peut définir sur celui-ci une structure d'espace vectoriel, lequel espace vectoriel est noté $\mathcal{E}_A$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \Theta_A : \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{AM} \end{array}$$

est une bijection, ce qui permet de transporter la structure d'espace vectoriel de E sur $\mathcal{E}$: on dit que $M + N = Q$ si $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AQ}$. On remarquera que la structure ainsi définie dépend très fortement du point A, celui-ci devenant en effet le zéro de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_A$ grâce à la relation $\overrightarrow{AA} = 0$.

Remarque I.2.4. On en conclura que, si l'espace vectoriel E possède une structure naturelle d'espace affine, il n'est pas vrai que l'espace affine $\mathcal{E}$ possède une structure *naturelle* d'espace vectoriel.

Sous-espaces affines

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* s'il est vide ou s'il contient un point A tel que $\Theta_A(\mathcal{F})$ soit un sous-espace vectoriel de E. On démontre facilement que ce sous-espace vectoriel ne dépend pas du choix du point A. Plus précisément :

Proposition I.2.5. *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout point B de $\mathcal{F}$, $\Theta_B(\mathcal{F}) = F$. Le sous-espace $\mathcal{F}$ est un espace affine dirigé par F.*

La démonstration est un exercice (exercice I.2). □

Remarque I.2.6. Si M et N sont des points de $\mathcal{F}$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est dans F.

Inversement, on a, pratiquement par définition :

Proposition I.2.7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit A un point de $\mathcal{E}$. Il existe un et un seul sous-espace affine dirigé par F et passant par A.*

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine dirigé par F et passant par A, alors $\Theta_A(\mathcal{F}) = F$ et

$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F \right\}.$$

Inversement, cette égalité définit bien un sous-espace affine dirigé par F et passant par A. $\square$

Exemples I.2.8

(1) Un espace affine de dimension 0 est constitué d'un unique point (pourquoi ?). Tous les points d'un espace affine $\mathcal{E}$ sont des sous-espaces affines.

On appelle *droites*, respectivement *plans*, les espaces ou sous-espaces affines de dimension 1, respectivement 2.

(2) Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Pour tout v dans l'image de f dans F, l'image réciproque $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de E (on considère, bien sûr, que E est muni de sa structure affine naturelle) de direction le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f.

Démonstration. Soit $v \in \operatorname{Im} f$. On veut démontrer que, pour u fixé dans $\mathcal{F} = f^{-1}(v)$, on a

$$\Theta_u(f^{-1}(v)) = \operatorname{Ker} f.$$

Mais $\Theta_u(x) = x - u$ par définition.

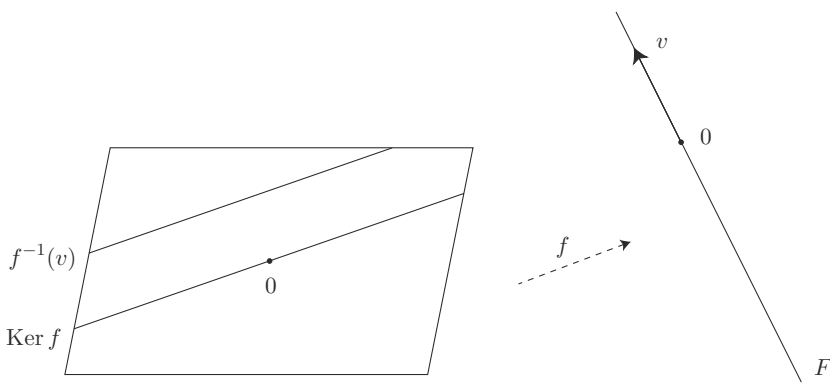


Figure 5

Si $y \in \operatorname{Ker} f$, pour $x = y + u$, $f(x) = f(u) = v$, donc $x \in \mathcal{F}$ et on a bien $y = x - u = \Theta_u(x)$ pour un x de $\mathcal{F}$. Ainsi $\operatorname{Ker} f \subset \Theta_u(\mathcal{F})$.

Réciproquement, si $y \in \Theta_u(\mathcal{F})$, $y = x - u$ pour un x de $\mathcal{F}$ et donc $f(y) = 0$. $\square$

Par exemple, l'ensemble des solutions d'un système linéaire, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du système sans second membre associé. L'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ définit un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$, ou $\mathbf{K}^n$).

(3) Plus généralement, les sous-espaces affines d'un espace vectoriel E sont les sous-espaces de la forme $F+u_0$, où F est un sous-espace vectoriel et u_0 un vecteur de E. Les sous-espaces vectoriels sont donc les sous-espaces affines contenant 0.

Sous-espace engendré par une partie de $\mathcal{E}$

Proposition I.2.9. *Toute intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ leur intersection. Si elle est vide, c'est un sous-espace affine. Sinon, on y choisit un point A. Chaque $\Theta_A(\mathcal{F}_i)$ est un sous-espace vectoriel F_i de la direction E de $\mathcal{E}$.

Soit F l'intersection des sous-espaces F_i dans E. C'est un sous-espace vectoriel (c'est clair ?) et $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine passant par A et dirigé par F : un point M de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{F}$ si et seulement si il est dans chacun des $\mathcal{F}_i$, soit si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est dans chacun des F_i donc dans F. □

Proposition I.2.10. *Soit S une partie de $\mathcal{E}$. L'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant S est le plus petit sous-espace affine contenant S.* □

Ce sous-espace est le *sous-espace engendré par* S. On le note $\langle S\rangle$.

Par exemple, si $S=\{A_0,\dots,A_k\}$ est un ensemble fini, $\langle A_0,\dots,A_k\rangle$ est le sous-espace affine contenant A_0 et dirigé par l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_k}$. En particulier, sa dimension est au plus k.

Définition I.2.11. Les $k+1$ points $A_0,\dots,A_k$ sont *affinement indépendants* si la dimension de l'espace $\langle A_0,\dots,A_k\rangle$ qu'ils engendrent est k. Si $k=\dim\mathcal{E}$, on dit que $(A_0,\dots,A_k)$ est un *repère affine* de $\mathcal{E}$.

Par exemple, un repère affine d'une droite est constitué de deux points (distincts). Les lecteurs devraient d'ailleurs s'assurer qu'ils savent *démontrer* que par deux points passe une droite et une seule[(4)] (exercice I.3). Trois points sont indépendants s'ils ne sont pas alignés et plus généralement $k+1$ points sont indépendants si et seulement si aucun n'est dans le sous-espace engendré par les autres (exercice I.9).

[(4)] Cette propriété, que la méthode axiomatique doit énoncer comme axiome, précisément, est ici une conséquence de la structure d'espace vectoriel.

Remarque I.2.12. On peut considérer un repère affine $(A_0, \ldots, A_k)$ d'un espace $\mathcal{E}$ comme la donnée d'une *origine* A_0 et d'une base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k})$ de sa direction. Ce qui permet d'attribuer à chaque point M de $\mathcal{E}$ des *coordonnées*, les composantes du vecteur $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base en question. Voir le § I.7.

Notations

Le symbole $\langle A, B\rangle$ désigne donc, si A et B sont distincts, la droite passant par A et B. On la notera aussi AB, bien sûr. Profitons-en pour donner une notation pour les segments, dans le cas des espaces affines réels, bien entendu[5]. Si A et B sont deux points, l'ensemble des points M de la droite AB tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, en bon français le segment AB, sera noté, en cas de risque d'ambiguïté, $[AB]$. Je préciserai toujours en français (« la droite AB », « le segment AB »...).

Position relative de deux sous-espaces affines, parallélisme

Définition I.2.13. On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont *parallèles* (notation $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$, ce qui se lit « $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ ») s'ils ont la même direction.

Comme le parallélisme est défini par les mots « la même », c'est une relation d'équivalence.

Remarque I.2.14. Avec cette définition, deux sous-espaces peuvent être disjoints ($\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$) sans être parallèles. Par exemple, une droite n'est jamais parallèle à un plan (figure 6). Par contre, dans un plan, deux droites qui ne se rencontrent pas sont parallèles. Certains auteurs qualifient de *faiblement parallèles* deux sous-espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ dont les directions vérifient $F \subset G$ (comme sur la figure 6). Je n'aime pas beaucoup cette terminologie, surtout parce que le « faible parallélisme » n'est pas une relation d'équivalence (c'est clair ?).

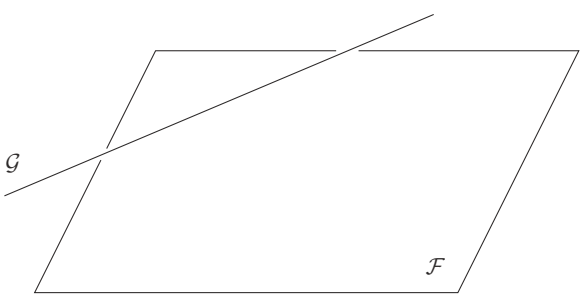


Figure 6

[5] Pourquoi, au fait ?

Exemple I.2.15. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, tous les sous-espaces $f^{-1}(v)$ (pour v dans l'image de f) sont parallèles puisqu'ils sont tous dirigés par $\operatorname{Ker} f$.

Proposition I.2.16. *Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égaux ou disjoints.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ne soit pas vide. Soit A un point de l'intersection. La direction F de $\mathcal{F}$ et le point A définissent un *unique* sous-espace affine, si l'on en croit la proposition I.2.7. Donc, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, on a l'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. □

Remarquons que le « postulat des parallèles[(6)] » est vrai dans les espaces affines :

***Proposition I.2.17* (« Postulat des parallèles »).** *Par tout point d'un espace affine, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.*

Démonstration. Le point A et la direction D de la droite $\mathcal{D}$ déterminent la parallèle en question :

$$\mathcal{D}' = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in D \right\}.$$ □

Proposition I.2.18. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F et G. On suppose que F et G engendrent E (en symboles, $F + G = E$). Alors tout sous-espace parallèle à $\mathcal{G}$ rencontre $\mathcal{F}$.*

La démonstration est fondée sur le lemme suivant.

Lemme I.2.19. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F et G. Soient A un point de $\mathcal{F}$, B un point de $\mathcal{G}$. Pour que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ne soit pas vide, il faut et il suffit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit dans $F + G$.*

Démonstration de la proposition. Soient A un point de $\mathcal{F}$ et B un point de $\mathcal{E}$. On veut montrer que le sous-espace affine $\mathcal{G}'$ passant par B et parallèle à $\mathcal{G}$ rencontre $\mathcal{F}$. On écrit

$$\overrightarrow{AB} \in E = F + G$$

et on applique le lemme à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}'$ pour conclure. □

(6) Il est contenu dans la définition du parallélisme, et donc, en dernière instance, dans la définition d'un espace vectoriel. Au sujet du postulat des parallèles, voir aussi le corollaire III.1.16, le corollaire V.3.2 et l'exercice VI.52.

Démonstration du lemme. Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, choisissons-y un point M. On a alors

$$\overrightarrow{AM} = u \in F, \quad \overrightarrow{BM} = v \in G$$

donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \in F + G.$$

Inversement, si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dans $F + G$, écrivons

$$\overrightarrow{AB} = u - v \text{ avec } u \in F \text{ et } v \in G.$$

Le point M défini par $u = \overrightarrow{AM}$ est dans $\mathcal{F}$ et

$$\overrightarrow{AB} = u + \overrightarrow{MB}$$

donc $\overrightarrow{BM} = v$ est dans G, donc M est dans $\mathcal{G}$ et finalement M est dans $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. □

I.3. Applications affines

Les applications affines sont le pendant en géométrie affine des applications linéaires en algèbre linéaire.

Définition I.3.1. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés respectivement par E et F. Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite *affine* s'il existe un point O dans $\mathcal{E}$ et une application linéaire $f : E \to F$ tels que

$$\forall\, M \in \mathcal{E}, \quad f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}.$$

Remarque I.3.2. L'application linéaire f ne dépend alors pas du choix du point O. En effet, si O' est un autre point, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} &= \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} \\
&= -\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(O')} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} \\
&= -f(\overrightarrow{OO'}) + f(\overrightarrow{OM}) \\
&= f(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}) \text{ puisque } f \text{ est linéaire} \\
&= f(\overrightarrow{O'M}).
\end{aligned}$$

□

Comme l'application linéaire f ne dépend que de φ, on a ainsi une application de l'ensemble des applications affines dans celui des applications linéaires. Je noterai $\overrightarrow{\varphi}$ l'image de φ par cette application (donc ici $f = \overrightarrow{\varphi}$).

Ce que nous venons de démontrer s'écrit, avec cette notation :

$$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) \text{ pour tous points } A, B \text{ de } \mathcal{E}.$$

Je vais utiliser des applications affines et des applications linéaires. Pour faciliter la lecture, je vais réserver les lettres latines f, g *etc.* aux applications linéaires et les lettres grecques φ, ψ *etc.* aux applications affines. Dans tous les cas, je préciserai naturellement « qui est quoi ».

Remarque I.3.3. Soit φ une application de l'espace affine $\mathcal{E}$ dans l'espace affine $\mathcal{F}$. Soit O un point de $\mathcal{E}$. Vectorialisons $\mathcal{E}$ en O et $\mathcal{F}$ en $\varphi(O)$. On a des isomorphismes linéaires

$$(\Theta_O)^{-1} : E \longrightarrow \mathcal{E}_O \quad \text{et} \quad \Theta_{\varphi(O)} : \mathcal{F}_{\varphi(O)} \longrightarrow F.$$

Considérons l'application composée $\overrightarrow{\varphi}$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \longrightarrow & \mathcal{E}_O & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}_{\varphi(O)} & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & M & \longmapsto & \varphi(M) & \longmapsto & v \end{array}$$

où M et v sont définis par $\overrightarrow{OM} = u$ et $v = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$. L'application $\overrightarrow{\varphi}$ vérifie

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}.$$

Dire que l'application φ est affine, c'est dire que $\overrightarrow{\varphi}$ est linéaire, ce qui est équivalent à dire que φ elle-même est *linéaire* comme application de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_O$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}_{\varphi(O)}$.

Exemples I.3.4

(1) L'application constante envoyant $\mathcal{E}$ sur un point est affine, l'application linéaire associée est l'application nulle.

(2) Si $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbf{R}$, les applications affines sont les applications de la forme $x \mapsto ax + b$ (l'application linéaire associée est $x \mapsto ax$).

(3) Plus généralement, si E et F sont deux espaces vectoriels munis de leurs structures affines naturelles, une application

$$\varphi : E \longrightarrow F$$

est affine si et seulement si il existe un vecteur v_0 dans F et une application linéaire

$$f : E \longrightarrow F$$

telle que l'on ait $\varphi(u) = f(u) + v_0$ pour tout u dans E.

Démonstration. On choisit $O = 0$, la relation $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$ s'écrit, par définition de la structure affine de l'espace vectoriel F,

$$\overrightarrow{\varphi}(u) = \varphi(u) - \varphi(0),$$

ce qui est bien la relation annoncée, avec $v_0 = \varphi(0)$ et $f = \overrightarrow{\varphi}$. $\square$

Les applications linéaires de E dans F sont donc les applications affines qui envoient 0 sur 0.

(4) Supposons que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Les applications affines dont l'application linéaire associée est Id_E sont les applications

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

telles que $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$ pour tous A et B dans $\mathcal{E}$. La règle du parallélogramme donne alors $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{B\varphi(B)}$ pour tous A et B. Autrement dit, le vecteur $\overrightarrow{M\varphi(M)}$ est un vecteur constant u. On dit que φ est la *translation* de vecteur u et on la note t_u (figure 7).

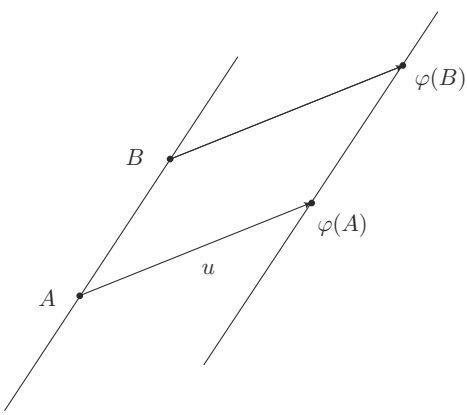


Figure 7. Translation

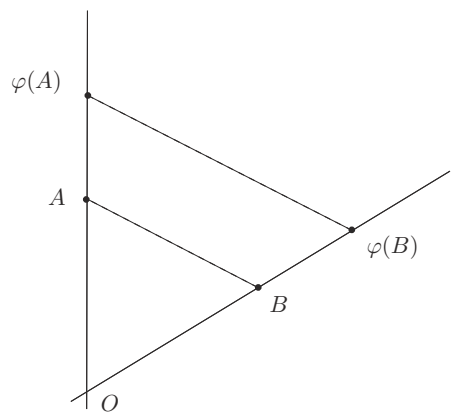


Figure 8. Homothétie

(5) Soient O un point, λ un scalaire et φ l'application définie par $\overrightarrow{O\varphi(M)} = \lambda\overrightarrow{OM}$. C'est une application affine. L'application linéaire associée est l'homothétie vectorielle de rapport λ. Le point O est fixe, on appelle φ l'*homothétie* de centre O et de rapport λ et on la note $h(O, \lambda)$ (figure 8).

Effet sur les sous-espaces

De même que (et parce que) l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel, on a :

Proposition I.3.5. *L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine, de direction F. Si $\mathcal{F}$ est vide, son image par φ est vide et en particulier,

c'est un sous-espace affine. Sinon, soit A un point de $\mathcal{F}$. Il est clair qu'alors $\varphi(\mathcal{F})$ est le sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ dirigé par $\overrightarrow{\varphi}(F)$ et passant par $\varphi(A)$. □

Corollaire I.3.6. *Toute application affine envoie trois points alignés sur trois points alignés.* □

Le même argument, c'est-à-dire l'utilisation du résultat vectoriel analogue, permet de démontrer :

Proposition I.3.7. *L'image inverse d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.*

La démonstration est laissée en exercice aux lectrices. □

Effet sur les barycentres[7]

La traduction en termes affines de la linéarité est, comme on dit souvent : « les applications affines conservent le barycentre », et plus précisément :

Proposition I.3.8. *L'image du barycentre de* $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$ *par l'application affine* φ *est le barycentre de* $((\varphi(A_1), \alpha_1), \ldots, (\varphi(A_k), \alpha_k))$. *Réciproquement, si une application* φ *transforme le barycentre de tout système de deux points pondérés* $((A, \alpha), (B, 1-\alpha))$ *en celui du système* $((\varphi(A), \alpha), (\varphi(B), 1-\alpha))$, *alors elle est affine.*

Démonstration. Supposons d'abord que φ soit une application affine. En notant systématiquement M' l'image $\varphi(M)$, on a, pour tout point P de $\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi}(\alpha_1\overrightarrow{PA_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{PA_k}) &= \alpha_1\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{PA_1}) + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{PA_k}) \\ &= \alpha_1\overrightarrow{P'A'_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{P'A'_k}.\end{aligned}$$

Si P est le barycentre du système des (A_i, α_i), la relation donne

$$\alpha_1\overrightarrow{P'A'_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{P'A'_k} = 0$$

et P' est bien le barycentre du système image.

Réciproquement, soit G le barycentre du système $((A, \alpha), (B, 1-\alpha))$. Pour tout point O de $\mathcal{E}$, on a

$$\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}.$$

Comme G' est le barycentre de $((A', \alpha), (B', 1-\alpha))$, il vérifie une relation du même type pour n'importe quel point et en particulier pour l'image O' de O :

$$\overrightarrow{O'G'} = \alpha\overrightarrow{O'A'} + (1-\alpha)\overrightarrow{O'B'}.$$

[7] Voir le § I.5 pour un rappel de la définition du barycentre.

Un point O et son image O' par φ étant fixés, on *définit* une application f par $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$... et on veut montrer que f est linéaire. Remarquons déjà qu'en « faisant $M = O$ », on trouve que $f(0) = 0$. On a ensuite

$$f(\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}) = f(\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{O'G'} = \alpha\overrightarrow{O'A'} + (1-\alpha)\overrightarrow{O'B'}$$

et donc, pour tous α, A et B,

$$f(\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}) = \alpha f(\overrightarrow{OA}) + (1-\alpha)f(\overrightarrow{OB}).$$

En particulier, si $B = O$, en posant $u = \overrightarrow{OA}$,

$$f(\alpha u) = \alpha f(u) + (1-\alpha)f(0) = \alpha f(u).$$

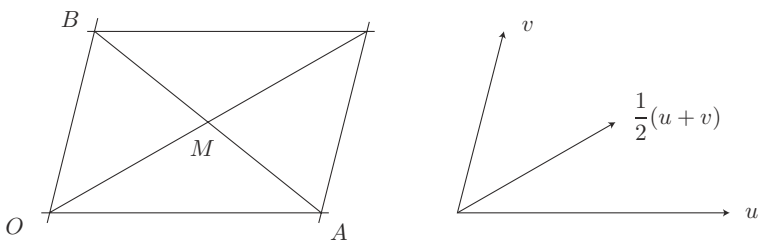


Figure 9

Enfin, si u et v sont deux vecteurs de E, on définit A et B de façon que $u = \overrightarrow{OA}$ et $v = \overrightarrow{OB}$. Pour $\alpha = 1/2$, on a[8]

$$\frac{1}{2}f(u+v) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

d'après ce qu'on vient de voir. Mais $(u+v)/2 = \overrightarrow{OM}$ où M est le milieu de AB (figure 9), donc

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{O'A'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O'B'} = \frac{1}{2}\left(f(u) + f(v)\right).$$

On en déduit (en multipliant par 2) que

$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

Ainsi f est bien linéaire, donc φ est affine, avec $\overrightarrow{\varphi} = f$. □

De la partie directe (et facile) de la proposition I.3.8, on déduit par exemple, en considérant les barycentres de deux points affectés de coefficients positifs (dans le cas d'un espace affine réel) :

[8] On utilise ici le fait que la caractéristique du corps est différente de 2.

Corollaire I.3.9. *L'image d'un segment par une application affine est un segment.* □

Applications affines et repères

De même qu'une application linéaire est déterminée par les images des vecteurs d'une base, une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine (c'est immédiat, exercice I.22). On utilise souvent la conséquence suivante de cette propriété :

Proposition I.3.10. *La seule transformation affine de l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n qui fixe $n+1$ points indépendants est l'identité.* □

Par exemple, une application affine du plan dans lui-même qui a trois points fixes non alignés est l'identité, une application affine qui a deux points fixes (distincts) fixe la droite qu'ils définissent.

Le groupe affine

Commençons par étudier la composition de deux applications affines.

Proposition I.3.11. *La composée $\psi \circ \varphi$ de deux applications affines $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une application affine. L'application linéaire associée est la composée des applications linéaires associées (en formules $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$).*

Une application affine φ est bijective si et seulement si l'application linéaire associée $\overrightarrow{\varphi}$ l'est. Alors φ^{-1} est affine et l'application linéaire qui lui est associée est l'application réciproque de $\overrightarrow{\varphi}$ (en formules $\overrightarrow{\varphi^{-1}} = \overrightarrow{\varphi}^{-1}$).

Démonstration. L'assertion sur la composition est claire. En effet, avec des notations évidentes, on a :

$$\overrightarrow{\psi(P')\psi(M')} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{P'M'}) = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{PM}).$$

Supposons maintenant que $\overrightarrow{\varphi}$ soit une application linéaire bijective. Pour M dans $\mathcal{F}$, on cherche les points P de $\mathcal{E}$ tels que $\varphi(P) = M$, mais ceci est équivalent à $\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'M}$, soit à $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'M}$ soit enfin à $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\varphi}^{-1}(\overrightarrow{O'M})$ d'où l'existence et l'unicité de P. L'application affine φ est donc bien bijective.

Inversement, si φ est bijective, donnons-nous un vecteur u de F et cherchons les v tels que $\overrightarrow{\varphi}(v) = u$. Fixons un point O et son image O', ainsi que le point M tel que $\overrightarrow{O'M} = u$. Comme φ est bijective, il y a un unique point P dans $\mathcal{E}$ tel que $M = \varphi(P)$. On a alors $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} = \overrightarrow{O'M} = u$ et $\overrightarrow{OP}$ est l'unique solution, donc $\overrightarrow{\varphi}$ est bijective. □

Corollaire I.3.12. *Les bijections affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même forment un groupe, le groupe affine* $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$. □

Proposition I.3.13. *L'application du groupe affine dans le groupe linéaire,*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ \varphi & \longmapsto & \overrightarrow{\varphi} \end{array}$$

qui envoie une application affine sur l'application linéaire associée, est un homomorphisme surjectif de groupes, dont le noyau est le groupe des translations de $\mathcal{E}$, isomorphe au groupe additif de l'espace vectoriel E.

Démonstration. C'est une conséquence directe de ce qui précède. Le noyau est formé des applications affines dont l'application linéaire associée est Id_E, c'est-à-dire des translations, comme on l'a déjà dit. Il est clair que le groupe des translations est isomorphe au groupe additif de E : ce n'est qu'une façon pédante de dire que $t_u \circ t_v = t_{u+v}$.

La seule chose restant à vérifier est la surjectivité de notre homomorphisme. On va montrer un résultat un peu plus précis qui mérite d'être énoncé à part :

Lemme I.3.14. *Soit O un point de $\mathcal{E}$. Soit f un isomorphisme linéaire de E. Il existe une unique application affine φ dont f est l'application linéaire associée et qui fixe O (en formules $f = \overrightarrow{\varphi}$ et $\varphi(O) = O$).*

Ce lemme achève la démonstration de la proposition. □

Sa démonstration est immédiate : $\varphi(M)$ est en effet le point défini par

$$\overrightarrow{O\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM}).$$

Cet argument donne d'ailleurs un résultat un peu plus général :

Lemme I.3.15. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés par E et F respectivement. Pour tous points O de $\mathcal{E}$, O' de $\mathcal{F}$, il existe une unique application affine*

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

qui envoie O sur O' et dont l'application linéaire associée est f. □

Remarquons que ces énoncés fournissent beaucoup d'exemples d'applications affines. Ils affirment aussi :

Corollaire I.3.16. *Étant donné un point O de $\mathcal{E}$, toute application affine φ de $\mathcal{E}$ dans lui-même s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\varphi = t_u \circ \psi$$

où ψ fixe O. □

Remarque I.3.17. On a déjà noté une propriété équivalente si l'on vectorialise $\mathcal{E}$ en O (voir les exemples I.3.4).

Conjugaison des translations

On aurait pu, dans l'énoncé du corollaire précédent (corollaire I.3.16), remplacer

$$\varphi = t_u \circ \psi \text{ par } \varphi = \psi \circ t_v.$$

L'application affine fixant O et ayant même application linéaire associée que φ est bien la même dans les deux écritures. Les vecteurs des translations, eux, sont différents : on a

$$t_u = \psi \circ t_v \circ \psi^{-1},$$

les deux translations sont *conjuguées*.

Proposition I.3.18. *La conjuguée $\varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}$ d'une translation par un élément φ du groupe affine* $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ *est la translation de vecteur $\overrightarrow{\varphi}(v)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a l'égalité

$$\overrightarrow{M\varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}(M)} = \overrightarrow{\varphi}(v).$$

Soient donc M un point quelconque et $N = \varphi^{-1}(M)$. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M\varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}(M)} &= \overrightarrow{\varphi(N)\varphi \circ t_v(N)} \\ &= \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{Nt_v(N)}) \text{ par définition de } \overrightarrow{\varphi} \\ &= \overrightarrow{\varphi}(v) \text{ par définition de } t_v.\end{aligned}$$

□

Une digression : la conjugaison

On peut lire l'énoncé précédent de la façon suivante : quand on conjugue une translation (par une transformation affine), on trouve une translation ; de plus, le vecteur de la nouvelle translation est donné, en fonction du vecteur originel et de la transformation qui conjugue, par la seule formule qui ait un sens. C'est une illustration d'un « principe » général en géométrie, que nous aurons l'occasion de rencontrer souvent dans ce livre et dont l'énoncé, très vague, est le suivant.

***« Principe » I.3.19* (Transport par conjugaison).** *Si τ est un élément d'un groupe de transformations G,*

– son conjugué $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ par un élément de G est un élément « de même nature géométrique » que τ,

– les éléments définissant cette « nature » sont, pour le conjugué $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$, les images de ceux de τ par φ.

Il ne s'agit pas d'un théorème, mais plutôt d'un cadre général qui peut se transformer, dans chaque situation particulière, en énoncé précis en remplaçant les parties entre guillemets par des objets définis précisément, par exemple

– translations, vecteurs des translations,
– symétries centrales, centres, ou plus généralement
– homothéties, centres (voir l'exercice I.29),
– (dans le groupe symétrique) transpositions, éléments échangés par la transposition.

Points fixes

Les lecteurs auront compris (voir au besoin la remarque I.3.3) qu'on peut considérer une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui a (au moins) un point fixe comme une application linéaire du vectorialisé de $\mathcal{E}$ en ce point dans lui-même. Il est donc intéressant de savoir quand une application affine a un point fixe.

Proposition I.3.20. *Soit φ une transformation affine de $\mathcal{E}$. Pour qu'elle ait un unique point fixe dans $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que l'isomorphisme $\overrightarrow{\varphi}$ n'ait aucun vecteur fixe autre que* 0.

Remarque I.3.21. La condition signifie que 1 n'est pas une valeur propre de $\overrightarrow{\varphi}$.

Démonstration. Si φ a un point fixe O, on vectorialise $\mathcal{E}$ en O pour voir que les autres points fixes de φ correspondent aux vecteurs fixes non nuls de $\overrightarrow{\varphi}$. Alors O est l'*unique* point fixe si et seulement si le seul vecteur fixe de $\overrightarrow{\varphi}$ est le vecteur nul.

Si $\overrightarrow{\varphi}$ n'a pas de vecteur fixe non nul (en d'autres termes, si cet endomorphisme n'a pas la valeur propre 1), on recherche d'éventuels points fixes de φ. Soient O un point et O' son image. Un point fixe M vérifie

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'\varphi(M)} = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM},$$

soit encore

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O}.$$

Par hypothèse, $\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}$ est injectif. Comme c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est aussi surjectif et l'équation $\overrightarrow{\varphi}(u) - u = \overrightarrow{O'O}$ a une unique solution $\overrightarrow{OM}$. Donc φ a un point fixe.

Enfin, si M et N sont deux points fixes de φ, $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN}$, de sorte que $\overrightarrow{MN} = 0$ et $M = N$. Donc φ a un unique point fixe. On en déduit la proposition. □

Sous certaines hypothèses, on peut préciser ce qui se passe quand l'application linéaire a la valeur propre 1 :

Proposition I.3.22. *Soit φ une transformation affine de $\mathcal{E}$. On suppose que l'espace vectoriel E se décompose en somme directe*

$$E = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id})\,.$$

Alors il existe un unique vecteur v et une unique application affine ψ avec un point fixe tels que

- $\overrightarrow{\varphi}(v) = v$,
- $\varphi = t_v \circ \psi$.

De plus, t_v et ψ commutent. L'application affine φ a un point fixe si et seulement si $v = 0$, auquel cas l'ensemble des points fixes de φ est un sous-espace affine dirigé par le sous-espace propre des points fixes de $\overrightarrow{\varphi}$.

Démonstration. On commence par choisir un point O de $\mathcal{E}$ et on utilise la décomposition de E en somme directe pour écrire

$$\overrightarrow{O\varphi(O)} = v + \overrightarrow{\varphi}(z) - z, \text{ où } v \text{ satisfait } \overrightarrow{\varphi}(v) = v.$$

Considérons le point A défini par $z = \overrightarrow{AO}$. On a

$$\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)} = z + v + \overrightarrow{\varphi}(z) - z + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OA}) = v.$$

On pose $\psi = t_{-v} \circ \varphi$. Pour cette nouvelle application affine, on a

$$\psi(A) = t_{-v}(\varphi(A)) = A,$$

donc ψ a un point fixe. On a aussi

$$\psi \circ t_v \circ \psi^{-1} = t_{\overrightarrow{\psi}(v)} = t_{\overrightarrow{\varphi}(v)} = t_v$$

(en utilisant la proposition I.3.18) de sorte que ψ et t_v commutent.

Démontrons maintenant l'unicité du couple (v, ψ). On suppose que

$$\varphi = t_v \circ \psi = t_{v'} \circ \psi'$$

où les deux applications ψ et ψ' ont des points fixes, disons $\psi(A) = A$ et $\psi'(A') = A'$, et où les deux vecteurs v, v' sont fixés par $\overrightarrow{\varphi}$. Alors $\overrightarrow{A\varphi(A)} = v$ et $\overrightarrow{A'\varphi(A')} = v'$, donc

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A')} + \overrightarrow{\varphi(A')A'} = v + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AA'}) - v'$$

et

$$\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AA'}) = v - v'.$$

Ce vecteur est dans $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E) = 0$, ce pourquoi $v = v'$ et $\psi = \psi'$. Si $v = 0$, on a $\varphi = \psi$ et φ a un point fixe.

Réciproquement, si φ a un point fixe, on l'utilise comme point O, on en déduit que $v = 0$. En vectorialisant l'espace affine $\mathcal{E}$ en O, on voit que les points fixes de φ correspondent aux vecteurs fixes de $\overrightarrow{\varphi}$. L'ensemble des points fixes est donc le sous-espace affine passant par O et dirigé par l'espace vectoriel des vecteurs fixes de l'application linéaire $\overrightarrow{\varphi}$. □

I.4. Trois théorèmes de géométrie plane

On utilise les applications affines pour démontrer trois théorèmes classiques de géométrie plane, les théorèmes de Thalès, Pappus et Desargues. On se place donc maintenant dans un plan affine.

***Remarque I.4.1* (Notation).** Soient A, B et C trois points alignés et soit u un vecteur directeur de la droite qu'ils définissent. On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \lambda u$, où $\lambda = \overline{AB}$, la « mesure algébrique » *dépend* du choix de u... Rappelons toutefois que le rapport $\overline{AB}/\overline{AC}$, lui, n'en dépend pas.

Le théorème de Thalès

Théorème I.4.2. *Soient d, d' et d'' trois droites parallèles distinctes, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient, pour $i = 1, 2$, $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. Alors on a*

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

Réciproquement, si un point B de $\mathcal{D}_1$ vérifie l'égalité

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}},$$

alors il est sur d'' (et $B = A''_1$).

Démonstration. Soit π la projection sur $\mathcal{D}_2$ parallèlement à d et soit p la projection linéaire associée. Alors π envoie A_1 sur A_2 *etc.* De plus, si $\overrightarrow{A_1A_1''} = \lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$, on a $p(\overrightarrow{A_1A_1''}) = \lambda p(\overrightarrow{A_1A_1'})$ car p est linéaire. C'est dire que $\overrightarrow{A_2A_2''} = \lambda\overrightarrow{A_2A_2'}$, égalité dont on déduit le sens direct du théorème.

La réciproque en est conséquence. On a

$$\overrightarrow{A_1A_1''} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}\overrightarrow{A_1A_1'}$$

de sorte que $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A_1''}$ et donc que $B = A_1''$. □

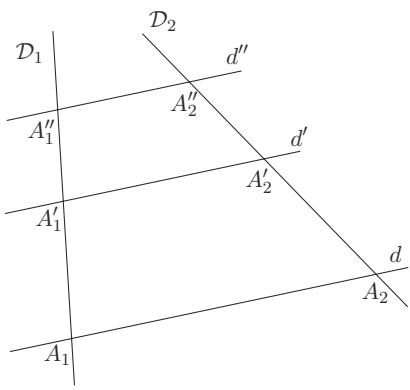


Figure 10. Le théorème de Thalès...

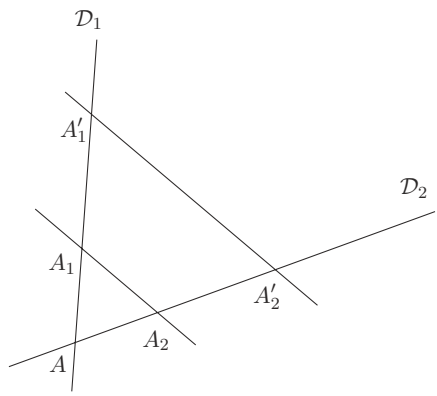


Figure 11. ... et un de ses corollaires

Corollaire I.4.3. *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites sécantes en A, d et d' deux droites parallèles coupant $\mathcal{D}_i$ en A_i, A_i' distincts de A. Alors*

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}}.$$

Démonstration. On fait passer par A une droite parallèle à d et d'. On peut appliquer le théorème de Thalès. On obtient ainsi

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}},$$

la première égalité recherchée. On voit aussi ainsi que l'homothétie de centre A qui envoie A_1 sur A_1' envoie A_2 sur A_2'. On en déduit la deuxième égalité. □

Remarque I.4.4. Le théorème de Thalès exprime simplement le fait que les projections sont des applications affines (exercice I.17). On utilise maintenant, pour

le théorème de Pappus, les homothéties et les translations, et précisément le fait que deux translations, ou deux homothéties de même centre, commutent.

Le théorème de Pappus

Théorème I.4.5. *Soient A, B, C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$. Si AB' est parallèle à BA' et BC' est parallèle à CB', alors AC' est parallèle à CA'.*

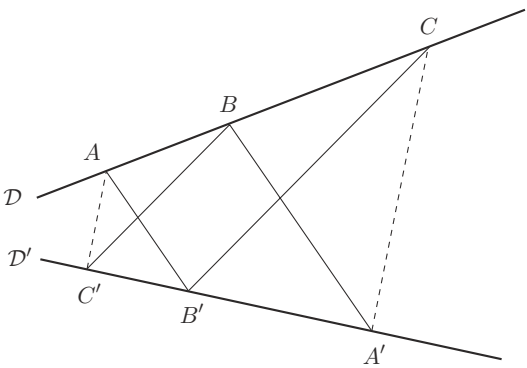


Figure 12. Le théorème de Pappus

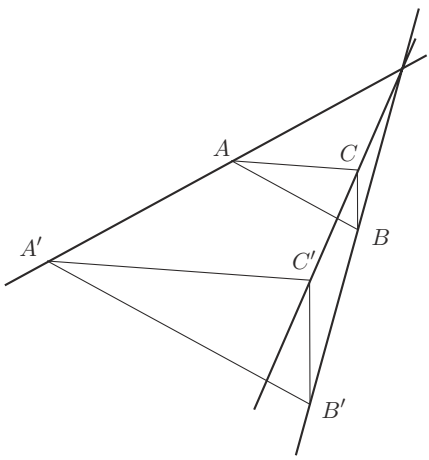


Figure 13. Le théorème de Desargues

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne soient pas parallèles. Soit O leur point d'intersection. Soient φ l'homothétie de centre O qui envoie A sur B et ψ celle qui envoie B sur C. Alors, grâce au théorème de Thalès (ou simplement parce qu'une homothétie vectorielle transforme tout vecteur en un vecteur colinéaire), φ envoie B' sur A' et ψ envoie C' sur B'. Ainsi $\psi \circ \varphi$ envoie A sur C et $\varphi \circ \psi$ envoie C' sur A'. Comme φ et ψ sont des homothéties de même centre, elles commutent. Il y a donc une homothétie de centre O qui envoie A sur C et C' sur A', mais alors AC' et CA' sont parallèles comme l'affirme la réciproque du théorème de Thalès.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, on peut remplacer les homothéties par des translations dans le raisonnement. □

Le théorème de Desargues

Encore des homothéties et des translations pour le théorème de Desargues.

Théorème I.4.6. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles.*

Démonstration. Si AA' et BB' se coupent en O, l'homothétie φ de centre O qui envoie A sur A' envoie aussi B sur B' (encore Thalès). Soit λ son rapport et soit $C'' = \varphi(C)$. Ainsi $\overrightarrow{OC''} = \lambda\overrightarrow{OC}$. Mais $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$ et donc $A'C''$ et AC sont parallèles. Alors C'' est sur la parallèle à AC passant par A', c'est-à-dire $A'C'$, mais il est aussi sur la parallèle à BC passant par B', c'est-à-dire $B'C'$. Donc $C'' = C'$. Mais bien sûr, O, C et C'' sont alignés, ce qui fait que CC' passe par O.

Si AA' et BB' sont parallèles, on raisonne de façon analogue avec des translations. □

On trouvera d'autres versions des théorèmes de Pappus et Desargues dans les exercices I.59 et I.60. Ils révéleront leur nature et leur unité profondes au chapitre VI.

I.5. Appendice : rappels succincts sur les barycentres

Dans ce paragraphe, je rappelle très brièvement quelques propriétés et définitions utiles sur les barycentres. Les lectrices sont invitées à compléter les démonstrations, en utilisant, si le besoin s'en fait sentir, leur livre de terminale préféré.

Si les A_i sont des points d'un espace affine $\mathcal{E}$ et les α_i des scalaires, on dit que le système $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$ est un *système de points pondérés.*

Proposition I.5.1. *Si $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$ est un système de points pondérés tel que $\sum \alpha_i \neq 0$, il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ vérifiant l'égalité*

$$\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

De plus, pour tout point O de $\mathcal{E}$, on a

$$(\sum \alpha_i)\overrightarrow{OG} = \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

L'unique point G défini par cette proposition est appelé le *barycentre* du système. Les lecteurs sont invités à se demander ce qui se passe quand la somme des coefficients est nulle.

Le barycentre du système $((A_1, \lambda\alpha_1), \ldots, (A_k, \lambda\alpha_k))$ est, par définition et pour tout scalaire λ non nul, le même que celui du système $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$.

Quand tous les coefficients α_i sont égaux, on parle d'*isobarycentre* des points $A_1, \ldots, A_n$. L'isobarycentre de deux points A et B est le *milieu* du segment AB,

celui de trois points A, B et C non alignés est appelé le *centre de gravité* du triangle ABC.

Le barycentre (ou plutôt l'opération de « barycentration ») satisfait à une propriété d'associativité un peu pénible à énoncer mais de vérification immédiate :

***Proposition I.5.2* (Associativité du barycentre).** *Étant donnés des scalaires*

$$\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,k_1}, \ldots, \alpha_{r,1}, \ldots, \alpha_{r,k_r}$$

tels qu'aucune des sommes $\sum_j \alpha_{i,j}$, $\sum_{i,j} \alpha_{i,j}$ *ne soit nulle, soit*

$$((A_{1,1}, \alpha_{1,1}), \ldots, (A_{1,k_1}, \alpha_{1,k_1}), \ldots, (A_{r,1}, \alpha_{r,1}), \ldots, (A_{r,k_r}, \alpha_{r,k_r}))$$

un système de points pondérés et soit G son barycentre. Soit B_i le barycentre du système $((A_{i,1}, \alpha_{i,1}), \ldots, (A_{i,k_i}, \alpha_{i,k_i}))$. Le barycentre du système $((B_1, \sum_j \alpha_{1,j}), \ldots, (B_r, \sum_j \alpha_{r,j}))$ est G. □

En d'autres termes, pour trouver le barycentre d'un grand système, on peut d'abord regrouper des termes et considérer leur barycentre, puis prendre le barycentre des nouveaux points, affectés de coefficients convenables (sommes des coefficients des points utilisés dans les regroupements). Un cas particulier simple et utile est le corollaire suivant :

Corollaire I.5.3. *Soit G le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$. On suppose que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et que $\beta + \gamma \neq 0$. Le point d'intersection A' de AG et de BC est le barycentre de $((B, \beta), (C, \gamma))$.* □

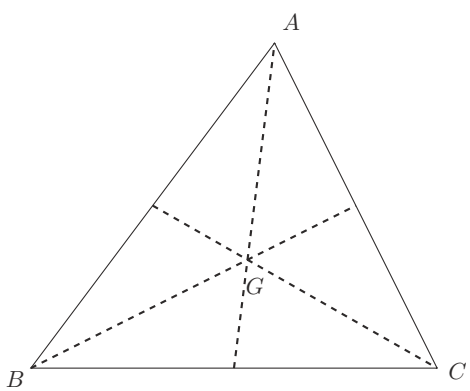


Figure 14. Centre de gravité d'un triangle

On en déduit par exemple que, dans un triangle, les trois médianes (droites joignant les sommets aux milieux des côtés opposés) sont concourantes au centre de gravité du triangle (figure 14).

Liée à celle de barycentre, la notion de convexité est une notion de géométrie affine importante et utile (pas seulement en géométrie !). On l'utilisera beaucoup au chapitre V.

I.6. Appendice : notion de convexité

Donnons-en ici quelques rudiments, renvoyant les lectrices à [**5**] pour plus de renseignements.

Plaçons-nous dans un espace affine réel (pour pouvoir parler de « segments »). Une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est dite *convexe* si pour tous points A et B de $\mathcal{C}$, le segment AB est entièrement contenu dans $\mathcal{C}$ (figure 15).

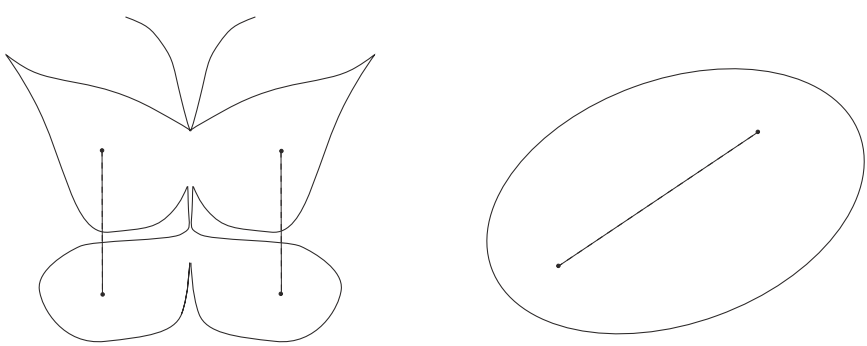


Figure 15

Exemple I.6.1. Avec cette définition, il est clair que l'ensemble vide, un point, un segment, une droite, un plan sont des convexes. Il est clair aussi que l'ensemble constitué de deux points (distincts) n'est pas convexe. On trouvera d'autres exemples et contre-exemples dans l'exercice I.45.

On construit de nouveaux convexes grâce à la proposition suivante, dont la démonstration (facile) est laissée aux lecteurs.

Proposition I.6.2. *Toute intersection de convexes est convexe.* □

La réunion de deux parties convexes n'est pas convexe en général (penser par exemple à une partie formée de deux points).

La convexité est une « notion affine », ce qui peut s'exprimer par l'énoncé suivant.

Proposition I.6.3. *L'image de tout convexe par une application affine est convexe.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ un convexe de l'espace affine $\mathcal{E}$ et soit φ une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Soient A' et B' deux points quelconques de $\varphi(\mathcal{C})$. On veut montrer que le segment $A'B'$ est contenu dans $\mathcal{C}$. On peut trouver deux points A et B de $\mathcal{C}$ dont A' et B' soient les images. Comme $\mathcal{C}$ est convexe, il contient le segment AB. L'image de ce segment par φ est le segment $A'B'$ (c'est ce que dit le corollaire I.3.9), qui est donc bien contenu dans $\varphi(\mathcal{C})$. □

On démontre (et les lectrices vérifieront) de la même façon que

Proposition I.6.4. *L'image réciproque de tout convexe par une application affine est convexe.* □

Définition I.6.5. L'intersection de tous les convexes contenant la partie S de $\mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$, appelée l'*enveloppe convexe* de S.

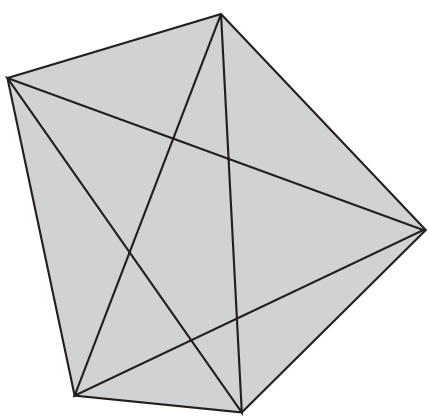


Figure 16. L'enveloppe convexe d'un polygone étoilé

Proposition I.6.6. *L'enveloppe convexe de S est formée des barycentres des points de S affectés de coefficients positifs ou nuls.*

Démonstration. Notons $\mathcal{C}(S)$ l'enveloppe convexe de S et S_+ l'ensemble des barycentres des points de S affectés de coefficients positifs ou nuls.

Remarquons d'abord que S_+ est convexe : si M et N sont deux barycentres de points de S affectés de coefficients positifs ou nuls, les points du segment MN sont les barycentres des systèmes $((M,\alpha),(N,1-\alpha))$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Grâce à l'associativité de la barycentration, ces points sont tous dans S_+.

Comme tout point M de S est barycentre du système $((M,1))$, on a l'inclusion $S \subset S_+$ et donc aussi, comme S_+ est convexe, on a $\mathcal{C}(S) \subset S_+$.

Montrons, inversement, que S_+ est contenu dans $\mathcal{C}(S)$. Pour ce faire, montrons, par récurrence sur k, que, si $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ sont des réels positifs ou nuls et $A_1,\ldots,A_k$ des points de $\mathcal{C}(S)$, alors le barycentre de $((A_1,\alpha_1),\ldots,(A_k,\alpha_k))$ est dans l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(S)$.

Si $k=1$, le barycentre est A_1 et l'assertion est vraie. Pour $k=2$, le barycentre est un point du segment A_1A_2 ; il est dans $\mathcal{C}(S)$ par convexité.

Montrons maintenant comment passer d'un système de $k-1$ points à un système de k points. Si l'un des α_i est nul, on peut retirer (A_i,α_i) de la liste. Supposons donc que tous les α_i sont non nuls. En particulier, α_k n'est pas nul et la somme $\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}$ non plus. Soit G' le barycentre du système $((A_1,\alpha_1),\ldots,(A_{k-1},\alpha_{k-1}))$. Le point G qui nous intéresse est le barycentre de $((G',\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}),(A_k,\alpha_k))$, qui est un point du segment $G'A_k$. Mais G' est dans l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(S)$ par hypothèse de récurrence et donc, grâce à la convexité de $\mathcal{C}(S)$, G est aussi un point de $\mathcal{C}(S)$. $\square$

I.7. Appendice : coordonnées cartésiennes

Un repère affine $(O,A_1,\ldots,A_n)$ (et une origine O) de l'espace affine $\mathcal{E}$ étant fixé(s), on peut repérer tout point M de $\mathcal{E}$ par les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{OA_1},\ldots,\overrightarrow{OA_n})$ de la direction E de $\mathcal{E}$, que l'on appelle les *coordonnées cartésiennes* de M dans le repère affine en question.

En d'autres termes, le choix du repère affine $(O,A_1,\ldots,A_n)$ définit un isomorphisme affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathbf{K}^n$, celui qui, au point M, associe ses coordonnées cartésiennes.

Sous-espaces affines

Un sous-espace affine peut être décrit par un point A et une direction, elle-même définie par une base $(u_1,\ldots,u_k)$, comme ceci :

$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \sum \lambda_i u_i \right\}.$$

Ce qui se traduit, pour les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de M, par

$$\begin{cases} x_1 & = & a_1 + \lambda_1 u_1^1 + \cdots + \lambda_k u_k^1 \\ \vdots & & \\ x_n & = & a_n + \lambda_1 u_1^n + \cdots + \lambda_k u_k^n \end{cases}$$

où $(a_1, \ldots, a_n)$ sont les coordonnées du point A, $(u_i^1, \ldots, u_i^n)$ sont les composantes du vecteur u_i dans la base $(\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n})$ de E. On appelle ces équations un *système d'équations paramétriques* de $\mathcal{F}$.

Par exemple, si $(b_1, \ldots, b_n)$ sont les coordonnées d'un point B distinct de A, les équations

$$\begin{cases} x_1 & = & a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ \vdots & & \\ x_n & = & a_n + \lambda(b_n - a_n) \end{cases}$$

décrivent la droite AB (voir plus généralement l'exercice I.11).

Un sous-espace affine peut aussi se décrire par des *équations cartésiennes*. Une base de E étant donnée, le sous-espace vectoriel F peut être décrit par un système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n & = & 0. \end{cases}$$

Les points M du sous-espace affine $\mathcal{F}$ sont caractérisés par l'équation $\overrightarrow{AM} \in \mathcal{F}$, soit par

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}(x_1 - a_1) + \cdots + \alpha_{1,n}(x_n - a_n) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \alpha_{m,1}(x_1 - a_1) + \cdots + \alpha_{m,n}(x_n - a_n) & = & 0 \end{cases}$$

ou encore par

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Ce sont des équations cartésiennes de $\mathcal{F}$. Par exemple le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z & = & 1 \\ 2x - 2y + 3z & = & 0 \end{cases}$$

décrit une droite affine de $\mathbf{R}^3$ (pourquoi ?).

Les équations cartésiennes décrivent le sous-espace affine comme

$$\mathcal{F} = f^{-1}((b_1, \ldots, b_m))$$

où $f : E \to \mathbf{K}^m$ est l'application linéaire dont la matrice dans les bases
- $(\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n})$, base de E, d'une part,
- base canonique de $\mathbf{K}^m$, de l'autre,

est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Les lecteurs sont invités à vérifier qu'ils ont compris en faisant l'exercice I.12.

Applications affines

Considérons maintenant une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et supposons que l'espace affine $\mathcal{E}'$ soit, lui aussi, muni d'un repère affine, noté $(O', A'_1, \ldots, A'_m)$. On représente les points de $\mathcal{E}'$ par leurs coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_m)$... autant dire qu'on utilise, en plus de l'isomorphisme $\mathcal{E} \to \mathbf{K}^n$, un isomorphisme $\mathcal{E}' \to \mathbf{K}^m$. À travers ces isomorphismes[9], φ devient une application affine

$$\mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m$$

dont nous savons (voir les exemples I.3.4) qu'elle est de la forme « application linéaire plus constante ». C'est dire que les coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_m)$ de l'image $\varphi(M)$ du point M de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont données par

$$\begin{cases} x'_1 & = & \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n + b_1 \\ \vdots & & \\ x'_m & = & \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n + b_m. \end{cases}$$

Les lectrices sont invitées à vérifier qu'elles ont bien compris cette écriture en essayant de changer de repères (exercice I.34).

Exercices et problèmes

Espaces affines, sous-espaces affines

Exercice I.1. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu[10] (si $AA'B'B$ est un parallélogramme et si M vérifie $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AM}$, alors il vérifie

[9] Si $\eta : \mathcal{E} \to \mathbf{K}^n$ et $\eta' : \mathcal{E}' \to \mathbf{K}^m$ sont les noms des isomorphismes définis par les repères, c'est $\eta' \circ \varphi \circ \eta^{-1}$ que l'on décrit ici.

[10] Suivant l'exemple de **[15]**, j'ai souvent omis les mots « Montrer que » dans la rédaction des énoncés.

aussi $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'M}$). Et réciproquement (si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, celui-ci est un parallélogramme).

Exercice I.2. Soit $\mathcal{F}$ une partie d'un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par l'espace vectoriel E et soit A un point de $\mathcal{F}$ tel que $\Theta_A(\mathcal{F})$ soit un sous-espace vectoriel F de E. Montrer que, pour tout point B de $\mathcal{F}$, on a $\Theta_B(\mathcal{F}) = F$ (c'est la proposition I.2.5).

Exercice I.3. Par deux points (distincts) d'un espace affine passe une droite et une seule.

Exercice I.4. On considère un plan affine sur le corps $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Combien a-t-il de points ? de droites ? combien chaque droite a-t-elle de points ? Montrer que par chaque point, il passe quatre droites et que pour une direction donnée, il y a trois droites parallèles à cette direction.

Exercice I.5. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$. À quelle condition $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est-il un sous-espace affine ?

Exercice I.6. Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine est un sous-espace affine si et seulement si pour tous points A et B de $\mathcal{F}$, on a l'inclusion $\langle A, B\rangle \subset \mathcal{F}$.

Exercice I.7. Dans un espace affine de dimension supérieure ou égale à 3, on considère n droites ($n \geq 2$). On suppose que deux droites de cette famille ont toujours un point commun. Montrer que, soit toutes ces droites ont un point commun, soit elles sont coplanaires.

***Exercice I.8* (Autour du « théorème des milieux »).** Pour cet exercice, on se place dans le cadre axiomatique. Plus précisément, on suppose qu'on ne connaît ni les barycentres ni le théorème de Thalès. On sait, par contre, qu'un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

(1) Le théorème des milieux. Soit ABC un triangle et soient C' le milieu du côté AB, B' celui de AC. Soit M le point de $B'C'$ tel que B' soit le milieu de $C'M$. Que peut-on dire du quadrilatère $AMCC'$? du quadrilatère $C'MCB$?

Démontrer le théorème des milieux : Dans un triangle ABC, soit C' le milieu de AB. Une droite passant par C' est parallèle à BC si et seulement si elle passe par le milieu de AC.

(2) Le centre de gravité. On considère le point d'intersection G des médianes CC' et BB', les points C'' de CC' et B'' de BB' tels que C' soit le milieu de GC'' et B' celui de GB''. Montrer que les droites CB'', AG et BC'' sont parallèles.

Montrer que G est le milieu de CC'' (on pourra considérer le triangle ACC'') et de même que c'est le milieu de BB''.

Montrer que AG est la troisième médiane du triangle (on pourra considérer le triangle $BB''C$).

En déduire que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en un point G situé aux deux-tiers de chacune d'elles en partant du sommet.

(3) Équipollence. On dit que deux couples de points (ou « bipoints ») (A, B) et (A', B') sont *équipollents* si $ABDC$ est un parallélogramme. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des couples de points.

La classe d'équivalence de (A, B) est notée $\overrightarrow{AB}$ et s'appelle un *vecteur*. Montrer que la relation $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ *définit* une loi de composition interne sur l'ensemble des vecteurs... et en fait un groupe.

Exercice I.9. Les points $A_0, \ldots, A_k$ sont affinement indépendants si et seulement si

$$\forall\, i \in \{0, \ldots, k\}\,, \quad A_i \notin \langle A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k \rangle.$$

Exercice I.10. Les points $A_0, \ldots, A_k$ sont affinement indépendants si et seulement si

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}\,, \quad A_i \notin \langle A_0, \ldots, , A_{i-1} \rangle.$$

Exercice I.11. L'espace affine est muni d'un repère affine. Décrire par un système d'équations paramétriques le sous-espace affine engendré par les points $B_0, \ldots, B_k$.

Exercice I.12. Soit A une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ et soit B un vecteur (colonne) de $\mathbf{K}^m$. Soit $\mathcal{F}$ la partie de $\mathbf{K}^n$ définie par

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbf{K}^n \mid AX = B\}\,.$$

Expliquer pourquoi $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine. Quelle est sa direction ? Quand est-il vide ? Exprimer sa dimension à l'aide du rang r de la matrice A.

Exercice I.13. À quelles conditions les deux équations

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{et} \quad a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$$

décrivent-elles des hyperplans parallèles de $\mathbf{K}^n$?

Exercice I.14. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine.

– Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A = (1, 0, 1)$ dans la direction engendrée par les vecteurs $u = (0, 2, 1)$ et $v = (1, -1, 0)$.

– Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle au plan précédent et contenant le point $B = (0, 1, 0)$.

– Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle au plan précédent et passant par le milieu de AB.

Exercice I.15. À quelles conditions les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z &= 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z &= 0 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites vectorielles de $\mathbf{K}^3$? la même droite vectorielle de $\mathbf{K}^3$?

À quelles conditions les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z &= d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z &= d'_2 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites affines de $\mathbf{K}^3$? des droites affines parallèles de $\mathbf{K}^3$?

Applications affines

***Exercice I.16* (Un « truc » très utile).** Soit f une application linéaire de E dans lui-même. On suppose que l'image par f de tout vecteur est un vecteur qui lui est colinéaire. Écrire cette hypothèse avec des symboles mathématiques et des quantificateurs. Écrire en termes analogues la définition d'une homothétie vectorielle. Comparer les deux écritures et démontrer que f est, quand même, une homothétie vectorielle.

***Exercice I.17* (Projections).** Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soit d' une direction de droite, non parallèle à $\mathcal{D}$. On appelle *projection* sur $\mathcal{D}$ parallèlement à d' l'application $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ telle que $M' = \pi(M) \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{MM'} \in d'$. Montrer que π est affine. Quelle est l'application linéaire associée ?

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace[11] $\mathcal{E}$, et soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus G = E$. Définir une projection (affine) sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Soit $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine vérifiant $\pi \circ \pi = \pi$. Montrer que π est une projection.

***Exercice I.18* (Le théorème de Thalès, en dimension quelconque)**

Dans un espace affine, on considère trois hyperplans parallèles H, H' et H'' ainsi que deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont aucune n'est contenue dans un hyperplan parallèle à H. Soient $A_i = \mathcal{D}_i \cap H$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap H'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap H''$. Montrer que

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

[11] Dans ces exercices, une lettre romaine non définie (E, F...) désigne toujours la direction de l'espace affine désignée par la lettre ronde ($\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$...) correspondante.

Montrer de plus que, si un point B de $\mathcal{D}_1$ vérifie

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}},$$

alors il est sur H'' (et $B = A_1''$).

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites sécantes en A, H et H' deux hyperplans parallèles coupant $\mathcal{D}_i$ en A_i, A_i' distincts de A. Montrer que

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}}.$$

***Exercice I.19* (Symétries).** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel E, on définit la symétrie s par rapport à F dans la direction de G par

$$s_F(u+v) = u - v \text{ si } u \in F \text{ et } v \in G.$$

On vérifiera que c'est une application linéaire et une involution. Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ et G une direction de sous-espaces affines tels que $F \oplus G = E$. On choisit un point $O \in \mathcal{F}$ et on définit $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par

$$\overrightarrow{O\sigma(M)} = s_F(\overrightarrow{OM}).$$

Si $O' \in \mathcal{F}$, vérifier que

$$\overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM}) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{O'M'} = s_F(\overrightarrow{O'M}).$$

Montrer que σ est une application affine (symétrie) ne dépendant pas du choix de O.

***Exercice I.20*.** On donne deux droites D et D' non parallèles d'un plan affine. À tout point M du plan, on associe le point M' défini de la façon suivante : la parallèle à D' passant par M coupe D en H et M' est tel que H soit le milieu de MM'. Montrer que l'application $M \mapsto M'$ est affine.

***Exercice I.21* (Symétries glissées).** Soit φ une transformation affine de l'espace affine $\mathcal{E}$. On suppose que l'application linéaire associée $\overrightarrow{\varphi}$ est une symétrie. Montrer que φ s'écrit de façon unique comme composée d'une symétrie affine σ et d'une translation de vecteur v fixe par $\overrightarrow{\varphi}$.

Soit φ une transformation affine de $\mathcal{E}$. On suppose que l'application linéaire associée est involutive (c'est-à-dire vérifie $\overrightarrow{\varphi}^2 = \mathrm{Id}_E$). Peut-on en déduire que φ est involutive (c'est-à-dire vérifie $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$) ?

***Exercice I.22*.** Une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine.

Exercice I.23. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension au moins égale à 2 et φ une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que l'image de toute droite soit une droite qui lui est parallèle. Montrer que φ est une translation ou une homothétie.

Exercice I.24. Une partie bornée d'un espace affine ne peut avoir plus d'un centre de symétrie.

Exercice I.25. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie et soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine vérifiant $\mathrm{Im}(\varphi^2) = \mathrm{Im}(\varphi)$.

(1) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe $P \in \mathcal{E}$ et $u \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{\varphi})$ tels que $\overrightarrow{M\varphi(P)} = u$.

(2) Montrer que u et $\varphi(P)$ sont uniquement déterminés dans cette décomposition.

(3) Donner un exemple d'application φ ayant cette propriété.

Exercice I.26. Dans un espace affine de dimension 3, on considère un tétraèdre (quelconque) $\mathcal{T}$ de sommets A, B, C et D. Démontrer que l'ensemble des applications affines qui préservent $\mathcal{T}$ est un groupe isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_4$ des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. Combien y a-t-il d'applications affines conservant $\mathcal{T}$?

Exercice I.27. Soient A, B et C trois points non alignés du plan et soit φ une application affine telle que $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(C) = A$. Est-elle complètement déterminée ? est-elle injective ? Étudier φ^3 et montrer que φ a un point fixe. Quelle est la matrice de φ dans le repère d'origine A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

Exercice I.28. On donne une application linéaire $f : E \to F$. Décrire toutes les applications affines $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ dont f est l'application linéaire associée.

Exercice I.29. Quelle est la conjuguée $\varphi \circ h(O, \lambda) \circ \varphi^{-1}$ de l'homothétie $h(O, \lambda)$ par la transformation affine φ ?

Exercice I.30. Quelle est la composée de deux homothéties $h(B, \lambda') \circ h(A, \lambda)$? L'ensemble des homothéties affines est-il un groupe ? Quel est le sous-groupe[12] qu'il engendre dans le groupe affine ?

Exercice I.31. Si $h(A, \lambda) \circ h(B, \mu) = h(C, \nu)$, les trois points A, B et C sont alignés.

Exercice I.32. L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère affine. Décrire en coordonnées cartésiennes les applications affines suivantes

[12] On appelle souvent ce sous-groupe *groupe des dilatations*.

– translation de vecteur v,
– homothétie de centre A et de rapport λ.

Exercice I.33. On se place dans un plan muni d'un repère affine muni d'un repère.

(1) Déterminer l'expression d'une application affine qui transforme le parallélogramme délimité par les droites $y = 2x + 1$, $y = 2x + 3$, $x = 3y$ et $x = 3y + 4$ en le « carré[13] » de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

(2) Peut-on transformer n'importe quel quadrilatère en un « carré » par une application affine ?

Exercice I.34. Les espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont munis de repères affines. Une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est alors donnée sous forme matricielle par

$$X' = AX + B$$

où A est une matrice à m lignes et m colonnes et B est un vecteur (colonne) de $\mathbf{K}^m$. Comment cette écriture se transforme-t-elle quand on change de repères affines dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$?

***Exercice I.35* (Affinités).** On donne un nombre réel $\alpha \neq 1$. Trouver les applications affines telles que, si M' désigne l'image de M et M'' celle de M', on ait $\overrightarrow{M'M''} = \alpha\overrightarrow{MM'}$.

***Exercice I.36* (Groupe affine de la droite).** Rappeler ce qu'est le groupe linéaire de la droite vectorielle $\mathbf{K}$. Décrire le groupe affine de cette même droite.

Barycentres

Exercice I.37. Dans un plan affine réel, décrire l'intérieur d'un triangle en termes de barycentres.

Exercice I.38. Soit $ABCD$ un tétraèdre (quelconque). Montrer que son centre de gravité G est le milieu des segments joignant les milieux des arêtes opposées.

Si A' est le centre de gravité du triangle BCD, montrer que G est sur le segment AA', aux trois quarts de AA' en partant de A.

Exercice I.39. Soit $ABCD$ un tétraèdre quelconque. Soient P, Q, R et S quatre points tels que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CS} = k\overrightarrow{CD}$. On appelle I et J les milieux respectifs de AC et BD. Montrer que les droites PS, QR et IJ sont concourantes.

[13] Pourquoi les guillemets ?

Exercice I.40. Soient a, b et c trois réels fixés tels que $a+b+c=1$ et soient A, B, C trois points variant sur trois droites parallèles. Déterminer le lieu géométrique du barycentre de $((A,a),(B,b),(C,c))$.

Exercice I.41. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un plan affine. Déterminer le lieu des milieux des segments reliant les barycentres de $((A,p),(B,q),(C,r))$ et de $((A',p),(B',q),(C',r))$ lorsque p, q et r parcourent $\mathbf{R}$ en vérifiant $p+q+r=1$.

Exercice I.42. Soient A, B, C et D quatre points d'un plan affine, tous affectés de la même masse. Montrer que les barycentres D', C', B' et A' des triangles ABC, ABD, ACD et BCD forment un quadrilatère homothétiques à $ABCD$. Trouver le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme $ABCD$ en $A'B'C'D'$.

Exercice I.43. Soit ABC un triangle de centre de gravité G dans un plan affine. On appelle A', B' et C' les milieux (respectivement) des côtés BC, CA et AB.

(1) Rappeler pourquoi il existe une homothétie de centre G envoyant A' sur A, B' sur B et C' sur C. Quel est son rapport ?

(2) On donne un réel k différent de 0 et 1. Soit M un point du plan. On appelle P l'image de M par l'homothétie de centre A' et de rapport k, Q l'image de M par l'homothétie de centre B' et de rapport k et R l'image de M par l'homothétie de centre C' et de rapport k. Quelles sont les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $1/(1-k)$?

(3) Montrer qu'il existe une homothétie ou une translation envoyant P sur A, Q sur B et R sur C. Que peut-on dire des droites AP, BQ et CR ?

Exercice I.44 **(Repère affine et coordonnées barycentriques)**

Soit $(A_0,\dots,A_n)$ un repère affine de l'espace $\mathcal{E}$. Montrer que tout point M de $\mathcal{E}$ est barycentre de $(A_0,\dots,A_n)$ pour certains coefficients $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$. Ces coefficients sont-ils uniques ? On appelle $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ un *système de coordonnées barycentriques* du point M dans le repère $(A_0,\dots,A_n)$.

Exercice I.45 **(Convexité).** Parmi les parties suivantes d'un espace affine, dire lesquelles sont convexes : un cercle, un disque, une demi-droite, un demi-plan, une sphère.

Soient ABC un triangle et φ une transformation affine. Montrer que l'image par φ de l'intérieur de ABC est l'intérieur du triangle $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$.

Exercice I.46. Soit S un ensemble fini de points d'un espace affine. Montrer que l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(S)$ est compacte.

Exercice I.47. Soit S une partie d'un espace affine. On suppose que S n'est contenue dans aucun hyperplan. Montrer que l'intérieur de l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(S)$ n'est pas vide.

***Exercice I.48* (Demi-plans).** Soient $\mathcal{D}$ une droite d'un plan affine $\mathcal{P}$ et A un point de $\mathcal{P}$ hors de $\mathcal{D}$. Soit

$$\mathcal{P}_A = \{M \in \mathcal{P} \mid [AM] \cap \mathcal{D} = \varnothing\}.$$

Soit Δ une droite passant par A et coupant $\mathcal{D}$ en un point I. Montrer que M est dans $\mathcal{P}_A$ si et seulement si la projection de M sur Δ parallèlement à $\mathcal{D}$ est sur la demi-droite ouverte d'origine I contenant A.

Montrer que

– si B est un point de $\mathcal{P}_A$, alors $\mathcal{P}_B = \mathcal{P}_A$,
– si $B \notin \mathcal{P}_A \cup \mathcal{D}$, alors $\mathcal{P}$ est la réunion disjointe $\mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B \cup \mathcal{D}$,
– $\mathcal{P}_A$ est convexe.

On appelle $\mathcal{P}_A$ le *demi-plan ouvert défini par $\mathcal{D}$ et contenant A*. Le demi-plan fermé est $\mathcal{P}_A \cup \mathcal{D}$. Définir plus généralement les demi-espaces d'un espace affine définis par un hyperplan et en montrer des propriétés analogues.

Exercice I.49. Montrer que le complémentaire d'une droite dans un plan affine réel a deux composantes connexes. Qu'en est-il du complémentaire d'une droite dans un espace affine réel de dimension 3 ou plus ? du complémentaire d'une droite dans un plan affine complexe ?

Exercices classiques

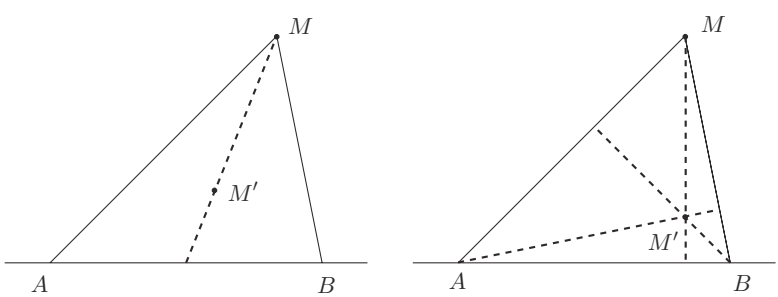


Figure 17

Exercice I.50. On fixe deux points A et B dans un plan affine $\mathcal{P}$. À tout point M du plan, l'application φ associe le centre de gravité du triangle AMB. Est-elle affine ? Même question avec l'orthocentre[14], $\mathcal{P}$ étant supposé euclidien (figure 17).

Exercice I.51. Soit ABC un triangle. Soit M_0 un point du côté AB. La parallèle à BC issue de M_0 coupe AC en M_1. La parallèle à AB issue de M_1 coupe BC en M_2 *etc.* (figure 18). On définit ainsi des points M_i (pour $i \geq 0$). Montrer que $M_6 = M_0$.

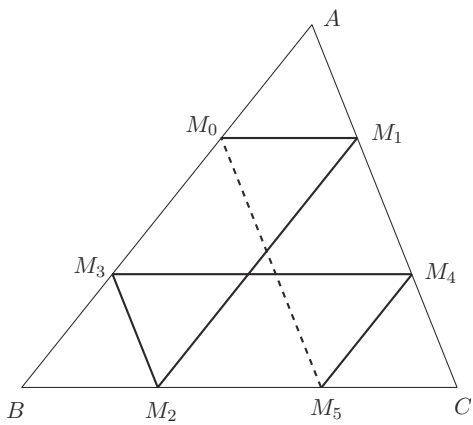


Figure 18

Exercice I.52. Étant donnés n points $A_1, \ldots, A_n$ d'un plan affine $\mathcal{P}$, peut-on trouver n points $B_1, \ldots, B_n$ tels que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ soient les milieux, respectivement, de $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_nB_1$ (figure 19) ? On étudiera en particulier les cas $n = 3$ et $n = 4$.

Exercice I.53. Soit ABC un triangle. À partir de tout point M, on construit $M_0 = M$, puis M_1, le milieu de M_0A, M_2 le milieu de M_1B, M_3 le milieu de M_2C, M_4 le milieu de M_3A et ainsi de suite. On pose $\varphi_n(M) = M_n$.

(1) Montrer que φ_n est une application affine.

(2) Montrer que la suite $(M_{3n})_{n\geq 0}$ est convergente. Quelle est sa limite ? Pensez-vous que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ soit convergente ?

[14] Certains des exercices de ce chapitre « affine » utilisent des notions euclidiennes bien connues (orthocentre, aire...) dont il eût été dommage de se priver sous prétexte qu'elles n'avaient pas encore été définies dans ce livre.

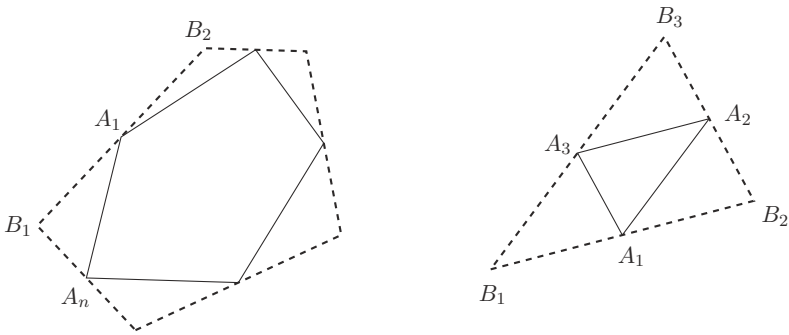


Figure 19

Exercice I.54. Étant donné un triangle ABC, construire trois points A', B' et C' de telle sorte que B' soit le milieu de AC', C' celui de BA' et A' celui de CB'.

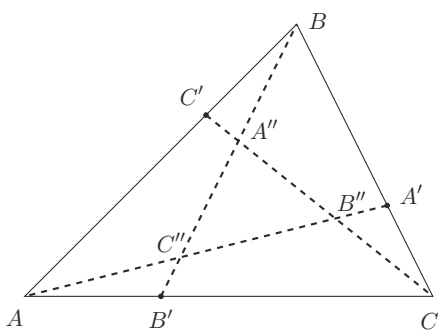


Figure 20

Exercice I.55. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on place trois points A', B', C' de façon que $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$. Les droites AA', BB' et CC' dessinent un petit triangle $A''B''C''$ (figure 20). Évaluer le rapport de l'aire de $A''B''C''$ à celle de ABC.

***Exercice I.56* (Théorème de Menelaüs).** Soient ABC un triangle, A', B' et C' des points de ses côtés BC, CA et AB. Montrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si les trois points vérifient l'égalité :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Applications. On suppose que A', B' et C' sont alignés.

Soient A'', B'' et C'' les symétriques de A', B' et C' par rapport aux milieux des côtés concernés. Montrer que A'', B'' et C'' sont alignés.

Soient I, J et K les milieux de AA', BB' et CC'. On veut montrer que I, J et K sont alignés[15]. Soient E, F et G les milieux de $B'C'$, AC' et AB' respectivement. Montrer que $I \in FG$, $J \in GE$ et $K \in EF$, puis que I, J et K sont alignés.

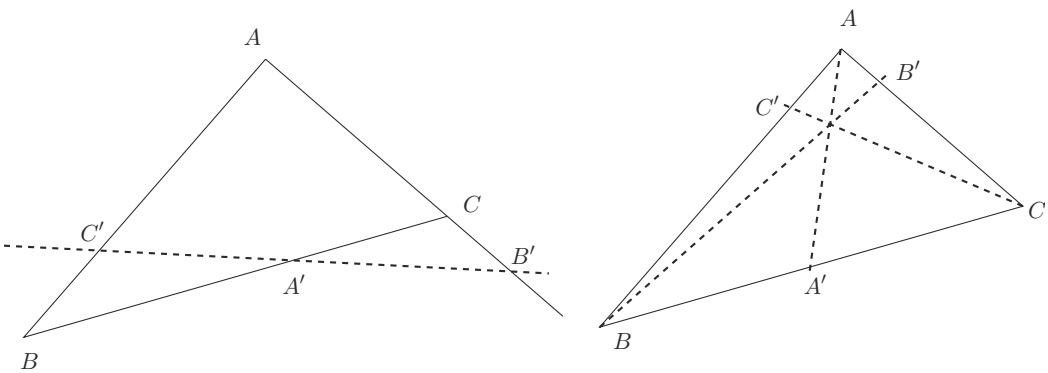


Figure 21. Menelaüs et Ceva (main dans la main)

***Exercice I.57* (Théorème de Ceva).** Soient A', B' et C' trois points sur les côtés d'un triangle comme dans l'exercice I.56. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont parallèles ou concourantes si et seulement si ils vérifient l'égalité

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice I.58. Soit ABC un triangle et soit M un point. On suppose que les droites MA, MB et MC coupent BC, CA et AB en A', B' et C' (respectivement). Montrer que

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = 1.$$

On suppose en plus que M est à l'intérieur du triangle. Montrer que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MA'}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{MB'}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{MC'}} \geq 6.$$

Pour quelles positions de M a-t-on l'égalité ?

[15] Ce résultat (il semble qu'il soit dû à Newton) s'énonce souvent ainsi : dans un quadrilatère complet, ici celui défini par les quatre droites AB, AC, BC et $B'C'$, les milieux des diagonales sont alignés.

Exercice I.59 **(Pappus, nouvelle version, corollaire de Menelaüs)**

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites se coupant en O. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{D}$, A', B' et C' trois points de $\mathcal{D}'$. On suppose que $B'C$ et $C'B$ se coupent en α, $C'A$ et $A'C$ en β, $A'B$ et $B'A$ en γ. Montrer que α, β et γ sont alignés (voir la figure 1 du chapitre VI).

Exercice I.60 **(Desargues, nouvelle version, corollaire de Menelaüs)**

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que BC et $B'C'$ se coupent en α, CA et $C'A'$ en β, AB et $A'B'$ en γ. Montrer que α, β et γ sont alignés si et seulement si AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles (voir la figure 7 du chapitre VI)[16].

Exercice I.61. Soient ABC un triangle, P un point de la droite BC, M un point de la droite AP. Les parallèles à CM menée par P et à AP menée par B se coupent en B'. Les parallèles à BM menée par P et à AP menée par C se coupent en C'. Soient I, J et K les milieux de PM, BB' et CC'. Montrer que I, J et K sont alignés, puis que M, B' et C' sont alignés.

Exercice I.62. On a dessiné, sur une feuille de papier, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ qui ne sont pas parallèles, mais dont le point d'intersection ne se trouve pas sur la feuille. On place sur la même feuille un point M en dehors de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$. Construire la droite joignant M au point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercices un peu plus théoriques

Exercice I.63. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. On définit une application

$$E \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

en associant, au vecteur u et au point M, l'unique point M' de $\mathcal{E}$, que l'on peut noter

$$M' = M + u$$

(voir la remarque I.2.3) et tel que $\overrightarrow{MM'} = u$. Vérifier que c'est une opération du groupe additif de l'espace vectoriel E sur $\mathcal{E}$, qu'elle est transitive (il y a une seule orbite) et libre (tous les stabilisateurs sont triviaux).

Inversement, montrer que si le groupe additif d'un espace vectoriel E opère librement et transitivement sur un ensemble $\mathcal{E}$, celui-ci est muni, par cette opération, d'une structure d'espace affine.

[16] Toutes ces applications du théorème de Menelaüs sont classiques, d'ailleurs Desargues utilisait le théorème de Menelaüs pour démontrer son théorème. Voir [**15**]. On les trouvera aussi, agréablement regroupées, dans [**43**].

Exercice I.64. Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel et soit X une classe d'équivalence modulo F. Montrer que X est un sous-espace affine dirigé par F.

***Exercice I.65* (Centre du groupe affine).** Le centre du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ (ensemble des éléments du groupe qui commutent avec tous les autres) est réduit à l'identité.

***Exercice I.66* (Groupe affine (suite)).** Montrer qu'il existe une bijection

$$\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}(E) \times E.$$

Existe-t-il un isomorphisme de groupes ?

***Exercice I.67* (Le théorème fondamental (ou prétendu tel) de la géométrie affine)**

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines (réels) de même dimension $n \geq 2$. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une *bijection*. On suppose que

$$(*) \qquad A, B, C \text{ alignés } \Longrightarrow \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \text{ alignés}$$

et on veut montrer qu'alors, φ est une application affine[17]. On note $A' = \varphi(A)$, *etc.*

(1) Montrer que l'hypothèse « φ est bijective » est nécessaire, puis que l'hypothèse $n \geq 2$ est nécessaire. On pourra dans les deux cas, si l'hypothèse n'est pas vérifiée, chercher une application *non* affine vérifiant $(*)$.

(2) Montrer que

(a) si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$, $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ (on pourra utiliser l'exercice I.6) ;

(b) si les $n+1$ points $A_0, \ldots, A_n$ constituent un repère affine de $\mathcal{E}$, alors leurs images $\varphi(A_0), \ldots, \varphi(A_n)$ sont des points affinement indépendants de $\mathcal{E}'$;

(c) en déduire que si $A_0, \ldots, A_k$ sont des points indépendants de $\mathcal{E}$, alors leurs images $A'_0, \ldots, A'_k$ sont des points indépendants dans $\mathcal{E}'$,

(d) que l'image de toute droite $\mathcal{D}$ est une droite $\mathcal{D}'$ et que l'image de tout plan est un plan,

(e) et que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites parallèles, leurs images $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ sont deux droites parallèles.

Soit O un point fixé dans $\mathcal{E}$ et O' son image dans $\mathcal{E}'$.

[17] Au delà de l'intérêt de ce théorème, on notera dans sa démonstration la « reconstruction » géométrique des opérations du corps dans la question 4. À ce sujet, il faut conseiller aux lecteurs intéressés la lecture de [**3**].

(3) Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et soit C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. On suppose que A, B et C ne sont pas alignés. En utilisant 2(e), montrer que $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$.

(4) Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par O et $\mathcal{D}'$ son image. On fixe $A \in \mathcal{D}$ un point distinct de O et son image A'. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on considère le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$. Vérifier que son image M' satisfait $\overrightarrow{O'M'} = \mu\overrightarrow{O'A'}$ pour un unique $\mu \in \mathbf{R}$. On a ainsi défini une application

$$\begin{array}{rccc} \sigma_{\mathcal{D}} : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \lambda & \longmapsto & \mu. \end{array}$$

(a) Soient M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = \lambda'\overrightarrow{OA}$. En utilisant un point B hors de la droite $\mathcal{D}$ et des droites parallèles, construire les points P et Q de $\mathcal{D}$ tels que $\overrightarrow{OP} = (\lambda + \lambda')\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = \lambda\lambda'\overrightarrow{OA}$.

(b) Montrer que $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda + \lambda') = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda) + \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda')$ et que $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda\lambda') = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda)\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda')$. En déduire que $\sigma_{\mathcal{D}}$ est un automorphisme du corps $\mathbf{R}$.

(c) Soit σ un automorphisme du corps $\mathbf{R}$. Vérifier que $\sigma(1) = 1$, que $\sigma|_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{Q}}$ et que σ est une application croissante. En déduire que $\sigma = \mathrm{Id}$.

(d) Montrer que φ est une application affine.

(5) Où a-t-on utilisé que φ est bijective ? que $n \geq 2$?

(6) Que se passe-t-il dans le cas complexe ?

Exercice I.68. Refaire l'exercice I.23 sans supposer *a priori* que φ est affine.

II

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE, GÉNÉRALITÉS

On se donne maintenant les moyens de mesurer les distances (voire les angles).

Dans ce chapitre, le corps de base sur lequel sont définis les espaces vectoriels et affines considérés est, impérativement, le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Les espaces considérés sont tous de dimension finie.

II.1. Espaces euclidiens

Rappelons qu'un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une « forme-bilinéaire-symétrique-définie-positive », c'est-à-dire une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & \Phi(u, v) \end{array}$$

– linéaire en chacune des deux variables,

– symétrique (c'est-à-dire telle que l'on ait $\Phi(v, u) = \Phi(u, v)$ pour tous les vecteurs u et v de E)

– et telle que l'on ait $\Phi(u, u) \geq 0$ pour tout u, l'égalité $\Phi(u, u) = 0$ ayant lieu si et seulement si $u = 0$.

Notations

On utilise ici les notations les plus standard possibles, c'est-à-dire qu'on écrit $u \cdot v$ pour $\Phi(u, v)$ et $\|u\|^2$ pour $u \cdot u$ (étant entendu que $\|u\|$ est un nombre positif). On écrit aussi $u \perp v$ quand $u \cdot v = 0$, ce qui définit aussi une relation entre sous-espaces, l'orthogonalité. On note $F^\perp$ l'orthogonal du sous-espace F, en symboles

$$F^\perp = \{x \in E \mid x \cdot y = 0 \text{ pour tout } y \text{ dans } F\}.$$

On a la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$. Plus généralement, si S est une partie de E, on note $S^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de S. C'est un sous-espace vectoriel, l'orthogonal du sous-espace engendré par S.

Définition II.1.1. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit *espace vectoriel euclidien*, un *espace affine euclidien* est un espace affine dirigé par un espace vectoriel euclidien. On définit la *distance* de deux points A et B par $d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

On s'autorisera bien sûr à abréger $d(A, B)$ en AB.

Rappel

L'inégalité de Cauchy-Schwarz[1] implique que $\|\cdot\|$ est une norme (un espace euclidien est un espace vectoriel normé) et que d est une distance (un espace affine euclidien est un espace métrique). C'est dire en particulier que d satisfait à l'inégalité triangulaire

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

avec ici la précision que l'égalité n'est possible que si les points A, C et B sont alignés dans cet ordre. Voir l'exercice II.1.

Isométries

Une *isométrie vectorielle* est une application linéaire qui conserve la norme, c'est-à-dire une application linéaire

$$f : E \longrightarrow F$$

(où E et F sont des espaces vectoriels euclidiens) telle que $\|f(u)\| = \|u\|$ pour tout vecteur u de E. Comme le produit scalaire peut s'exprimer à l'aide de la norme, pour mémoire

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right),$$

les isométries préservent le produit scalaire et, en particulier, l'orthogonalité.

De même, une application affine

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

(où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces affines euclidiens) est une *isométrie affine* si

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$$

[1] Voir au besoin l'exercice II.1 et/ou sa solution.

pour tous A et B dans $\mathcal{E}$... ce qui est bien entendu équivalent à dire que l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

Il est bien clair que la composée de deux isométries est une isométrie. On appelle $\mathrm{O}(E)$, resp. $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, l'ensemble des isométries de E dans E (vectorielles), resp. de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ (affines).

Théorème II.1.2. *Les ensembles* $\mathrm{O}(E)$, $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, *munis de la composition des applications, sont des groupes.*

Démonstration. Il faut montrer que les isométries sont des bijections. On sait qu'une application affine est bijective si et seulement si l'application linéaire associée l'est (voir la proposition I.3.11). Il suffit donc de démontrer que les isométries vectorielles sont des bijections.

Maintenant, un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement si il est injectif[(2)]. Il suffit donc de démontrer que toute application linéaire $f : E \to E$ qui préserve la norme est injective, ce qui est très facile :

$$f(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \|f(u)\| = \|u\| \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

De plus, la bijection réciproque d'une isométrie est encore une isométrie. Écrivons la démonstration de cette assertion dans le cas affine pour varier les plaisirs. Soit φ une isométrie affine. La bijection réciproque ψ est encore une application affine en vertu de la proposition citée ci-dessus et

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B) \quad \Rightarrow \quad d(A', B') = d(\psi(A'), \psi(B'))$$

ce qui fait que ψ est bien une isométrie.

Enfin, les lectrices ont certainement remarqué que l'application identique Id_E est une isométrie vectorielle (et $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ une isométrie affine). □

Exemples II.1.3

(1) Les translations sont des isométries (l'application linéaire associée à une translation est l'identité).

(2) En général, une homothétie de rapport λ multiplie les longueurs par $|\lambda|$. Une homothétie n'est donc une isométrie que si son rapport est de valeur absolue égale à 1... c'est-à-dire si elle est l'identité (cas où $\lambda = 1$) ou une symétrie centrale (cas où $\lambda = -1$). Ça n'empêche pas les homothéties d'être très utiles en géométrie euclidienne (voir par exemple les exercices II.13, II.18, II.20, II.21 pour s'en convaincre).

(2)... un des miracles de la linéarité en dimension finie.

(3) Les symétries orthogonales sont des isométries. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, la symétrie orthogonale s_F est l'application linéaire qui vaut Id_F sur F et $-\mathrm{Id}_G$ sur $G = F^\perp$, soit $s_F(y+z) = y - z$ si $y \in F$ et $z \in G$ (figure 1).

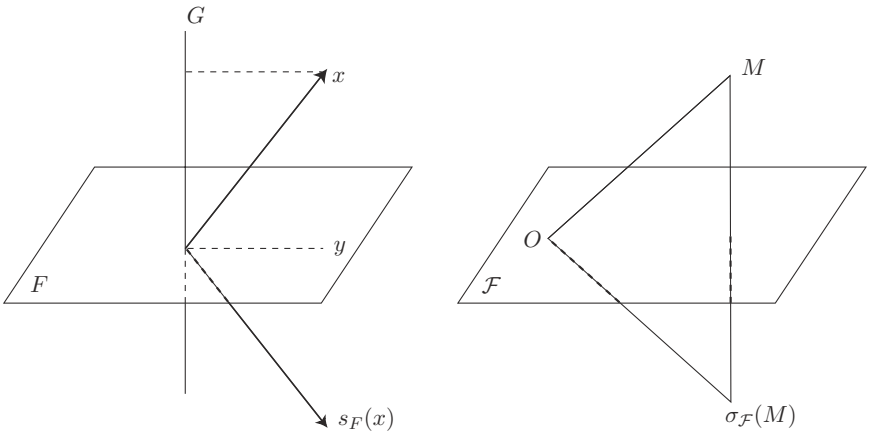


Figure 1

On définit de même les symétries orthogonales *affines :* si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, $M' = \sigma_{\mathcal{F}}(M)$ est défini par $\overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM})$ où F est bien sûr la direction de $\mathcal{F}$ et O un point quelconque de $\mathcal{F}$. Il est facile, mais indispensable, de vérifier que le résultat ne dépend pas du choix de O dans $\mathcal{F}$ (exercice I.19). On aura remarqué que les symétries sont des involutions (en symboles $\sigma_{\mathcal{F}}^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$).

(4) En particulier, les *réflexions*, qui sont les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, sont des isométries. Voir l'exercice II.7 pour une formule explicite.

Notons enfin un résultat simple et utile, parce qu'il est souvent agréable de connaître des sous-espaces stables par une isométrie.

Proposition II.1.4. *Soit $F \subset E$ un sous-espace d'un espace vectoriel euclidien, stable par une isométrie f. Alors $F^\perp$ est stable par f.*

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$. C'est dire que pour tout y dans F, on a $x \cdot y = 0$. Mais f préserve le produit scalaire, on a donc $f(x) \cdot f(y) = 0$ pour tout y dans F. Comme F est stable par f, $f(y) \in F$. De plus, f est une isométrie et en particulier elle est bijective, donc tout élément z de F s'écrit $z = f(y)$ pour un $y \in F$. On a donc

$$\forall\, z \in F, \quad f(x) \cdot z = 0,$$

c'est-à-dire que $f(x) \in F^\perp$. $\square$

II.2. Structure des isométries

Je vais montrer que toute isométrie de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme la composée d'un certain nombre de réflexions. De façon plus pédante : « les réflexions engendrent le groupe des isométries ». Je fais d'abord la démonstration pour les isométries affines *planes*, puis je la refais en toutes dimensions (en commençant par le cas vectoriel).

Les isométries planes

Considérons pour commencer une isométrie φ d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Si φ a trois points fixes non alignés, on sait (proposition I.3.10) que φ est l'identité.

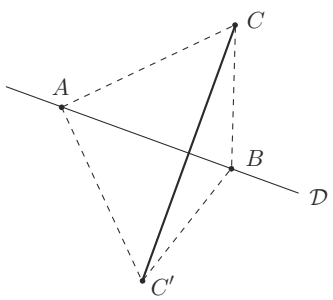


Figure 2

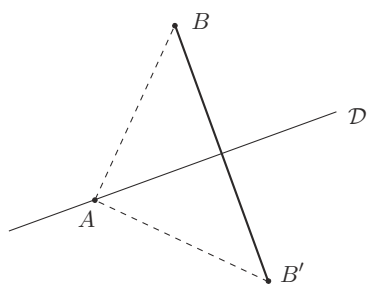


Figure 3

Si φ a deux points fixes distincts A et B (mais pas trois points fixes non alignés), on considère la droite $\mathcal{D} = \langle A, B\rangle$ et un point C hors de $\mathcal{D}$ avec son image C'. Comme φ est une isométrie, $AC = AC'$ et $BC = BC'$ et donc $\mathcal{D}$ est la médiatrice[(3)] de CC' (figure 2). Alors $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \varphi$ fixe A, B et C, donc $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \varphi$ est l'identité et $\varphi = \sigma_{\mathcal{D}}$, φ est une réflexion.

Si φ a un unique point fixe A, soient B un autre point et B' son image. Comme $AB = AB'$, la médiatrice $\mathcal{D}$ de BB' passe par A (figure 3) et $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \varphi$ a deux points fixes A et B, donc c'est une réflexion et φ est la composée de deux réflexions.

Si φ n'a aucun point fixe, soient A et A' un point et son image. Si $\mathcal{D}$ est la médiatrice de AA', $\sigma_{\mathcal{D}} \circ \varphi$ fixe A donc elle est composée d'une ou de deux réflexions, donc φ est la composée de deux ou de trois réflexions.

On a ainsi démontré, en dimension 2, une version assez précise du résultat annoncé, le théorème II.2.2 ci-dessous.

Montrons maintenant ce résultat en toutes dimensions, en nous inspirant de la démonstration ci-dessus, c'est-à-dire en utilisant d'éventuels points fixes pour se

(3) La droite ensemble des points équidistants de C et C' (voir l'exercice II.7).

ramener à des cas plus simples ou déjà connus. Commençons par le cas vectoriel, où l'énoncé précis est :

Théorème II.2.1. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions pour un entier $p \leq n$.*

Je démontrerai ensuite le résultat affine correspondant (le théorème II.2.2 ci-dessous), comme conséquence à la fois du résultat vectoriel et de sa démonstration.

Démonstration. Je la fais par récurrence sur la dimension n de E.

Le cas où $n = 1$ est facile parce qu'on peut faire la liste de toutes les isométries d'une droite euclidienne : les applications linéaires sont toutes de la forme $x \mapsto \lambda x$, et pour qu'une telle application soit une isométrie, il faut et il suffit que l'on ait $|\lambda| = 1$, donc les isométries sont l'identité (composée de zéro réflexion) et la symétrie centrale $-\mathrm{Id}$, qui est une réflexion : le théorème est vrai (par simple inspection) pour $n = 1$.

Supposons donc (c'est l'hypothèse de récurrence) que le théorème soit vrai dans tous les espaces vectoriels euclidiens de dimension $\leq n-1$ et plaçons-nous dans E, espace euclidien de dimension n. Soit f une isométrie.

Pour utiliser l'hypothèse de récurrence, il nous faut un moyen de nous ramener à un espace de dimension plus petite. Je vais utiliser un vecteur $x_0 \neq 0$. De deux choses l'une : soit il est fixé par f (c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$), soit il ne l'est pas ($f(x_0) \neq x_0$).

Dans le premier cas, on considère l'hyperplan $S = x_0^\perp$. Comme f préserve le produit scalaire et fixe x_0, f préserve S (c'est la proposition II.1.4). Considérons donc la restriction $f' = f|_S$ de f à S, c'est une isométrie de S, qui est de dimension $n-1$. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, qui nous dit qu'il existe q hyperplans $H'_1, \ldots, H'_q$ de S (avec $q \leq n-1$) tels que

$$f' = s_{H'_1} \circ \cdots \circ s_{H'_q}.$$

À partir de ces hyperplans de S, il nous reste à fabriquer des hyperplans de E. Soit donc H_i l'hyperplan de E engendré par H'_i et x_0 (figure 4). On a alors

$$s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_q} = f.$$

Pour s'en convaincre, il suffit en effet de décomposer E en $E = S \oplus \langle x_0 \rangle$ et de constater qu'on a

$$\begin{cases} s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_q}(\lambda x_0) = \lambda x_0 = f(\lambda x_0) \\ \\ s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_q}(y) = s_{H'_1} \circ \cdots \circ s_{H'_q}(y) = f'(y) = f(y) \quad \text{si } y \in S. \end{cases}$$

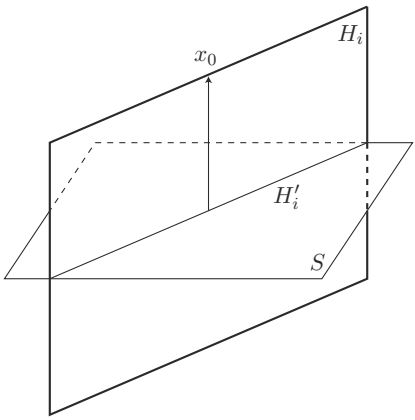


Figure 4

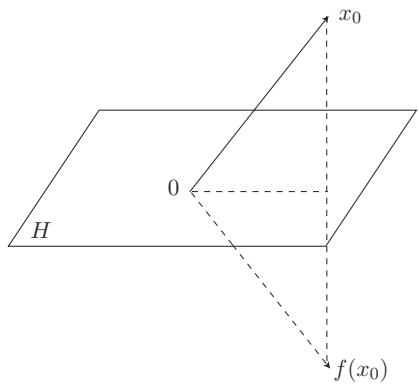


Figure 5

Ceci finit la démonstration (avec un nombre $q \leq n-1$ de réflexions) dans le cas où $f(x_0) = x_0$.

Considérons maintenant le cas où $f(x_0) \neq x_0$. L'idée est de se ramener au cas précédent en « rendant x_0 fixe ». Soit H l'hyperplan médiateur de x_0 et $f(x_0)$. Il s'agit *a priori* d'un hyperplan affine de E. Comme $\|f(x_0)\| = \|x_0\|$, le vecteur 0 est dans H, qui est donc un hyperplan vectoriel. On a en fait

$$H = (x_0 - f(x_0))^{\perp}$$

(figure 5), de sorte que $s_H(x_0) = f(x_0)$. Alors

$$s_H \circ f(x_0) = s_H(f(x_0)) = x_0.$$

Donc $s_H \circ f$ a un point fixe et on peut lui appliquer le résultat obtenu dans le premier cas :

$$s_H \circ f = s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_q} \quad q \leq n-1,$$

ainsi

$$f = s_H \circ s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_q}$$

est bien composée de p réflexions (avec $p \leq n$). □

Théorème II.2.2. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n. Toute isométrie de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexions pour un entier $p \leq n+1$.*

Démonstration. On s'inspire de la dernière partie de la démonstration précédente pour se ramener au cas vectoriel.

En effet si l'isométrie affine φ a un point fixe $A \in \mathcal{E}$, on n'a qu'à vectorialiser $\mathcal{E}$ en A pour être ramené au cas vectoriel. On obtient donc, en appliquant le

théorème II.2.1, que φ est composée de p réflexions par rapport à des hyperplans passant par A (pour un nombre $p \leq n$).

Sinon, soient A un point quelconque et $A' \neq A$ son image. Appelons $\mathcal{H}$ l'hyperplan médiateur de AA' (voir au besoin l'exercice II.7), de sorte que $\sigma_{\mathcal{H}} \circ \varphi$ est une isométrie affine qui fixe A et à qui on peut appliquer ce qui précède. Ainsi

$$\sigma_{\mathcal{H}} \circ \varphi = \sigma_{\mathcal{H}_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\mathcal{H}_p}$$

pour un $p \leq n$ et donc

$$\varphi = \sigma_{\mathcal{H}} \circ \sigma_{\mathcal{H}_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\mathcal{H}_p}$$

est composée de $p+1$ ($\leq n+1$) réflexions. □

Remarques II.2.3

– Si ces théorèmes ont un intérêt théorique (ça ne fait jamais de mal de connaître un système de générateurs pour un groupe), ils sont aussi très concrets puisqu'ils permettent par exemple de faire la liste de *toutes* les isométries des espaces euclidiens de petites dimensions (2 et 3 notamment). On l'a vu au début de cette partie pour la dimension 2, on en reparlera, de même que de la dimension 3 (§§ III.2 et V.1).

– En examinant attentivement les démonstrations ci-dessus, on peut estimer plus précisément le nombre de réflexions indispensables à l'aide de la dimension de l'ensemble des points fixes de l'isométrie considérée, mais ça ne me semble pas essentiel ici (voir [**5**] par exemple).

Déplacements

Le nombre de réflexions intervenant dans la décomposition d'une isométrie donnée peut être rendu arbitrairement grand : penser que

$$s_H \circ s_H \circ f = f!$$

Mais sa parité, elle, est bien définie, comme on va le voir tout de suite.

Définition II.2.4. On dit qu'une isométrie (affine) est un *déplacement* si son déterminant (celui de l'application linéaire associée) est positif. Une isométrie qui n'est pas un déplacement est un *anti-déplacement*.

Remarques II.2.5

(1) Les isométries sont des bijections et ont donc un déterminant non nul.

(2) L'ensemble $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ des déplacements est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

(3) Les déplacements sont les isométries qui préservent les orientations de l'espace (voir l'exercice II.11).

Proposition II.2.6. *Pour que le nombre de réflexions qui intervient dans la décomposition d'une isométrie soit pair il faut et il suffit que celle-ci soit un déplacement.*

Démonstration. Il suffit en effet de montrer que le déterminant d'une réflexion vectorielle est négatif. Et ceci est très facile. Si H est un hyperplan et si $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de H, appelons e_n un vecteur non nul de la droite orthogonale à H, de sorte que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de s_H est la matrice diagonale $(1, \ldots, 1, -1)$ dont le déterminant est -1. □

Remarque II.2.7. Cette démonstration ajoutée au fait que le déterminant est un homomorphisme de groupes et au théorème de décomposition des isométries (théorème II.2.2) montre aussi que le déterminant d'une isométrie vaut ± 1 ($+1$ pour un déplacement, -1 pour un anti-déplacement). On en déduit que $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ est le noyau de l'homomorphisme de groupes

$$\text{dét} : \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{R} - \{0\} \text{ ou } \{1, -1\}$$

et donc que c'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

La « forme réduite » des isométries

Le résultat suivant est très utile, puisqu'il permet d'associer, à toute isométrie affine, une (autre) isométrie, qui a la même application linéaire associée mais qui a des points fixes. C'est la version de la proposition I.3.22 adaptée au cas particulier des isométries.

Proposition II.2.8. *Soit φ une isométrie affine de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Il existe une isométrie ψ et une translation t_v de $\mathcal{E}$ telle que*

- *l'espace $\mathcal{F}$ des points fixes de ψ n'est pas vide,*
- *le vecteur v de la translation est dans la direction F de ce sous-espace,*
- *on a $\varphi = t_v \circ \psi$.*

De plus, le couple (v, ψ) est unique, les isométries t_v et ψ commutent et $F = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$.

Démonstration. Démontrons d'abord que, pour toute isométrie φ, on a une somme directe orthogonale

$$E = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E).$$

Comme ces deux sous-espaces ont des dimensions complémentaires, il suffit de démontrer qu'ils sont orthogonaux. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E)$, de sorte que l'on

a $\overrightarrow{\varphi}(x) = x$. Soit aussi $y \in \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E)$, de sorte que $y = \overrightarrow{\varphi}(z) - z$ pour un certain $z \in E$. On a bien alors

$$x \cdot y = x \cdot (\overrightarrow{\varphi}(z) - z) = x \cdot \overrightarrow{\varphi}(z) - x \cdot z = \overrightarrow{\varphi}(x) \cdot \overrightarrow{\varphi}(z) - x \cdot z = 0.$$

Il ne reste qu'à appliquer la proposition I.3.22 ou à copier sa démonstration. Soit O un point quelconque de $\mathcal{E}$; on décompose $\overrightarrow{O\varphi(O)} = v + \overrightarrow{\varphi}(z) - z$ avec $\overrightarrow{\varphi}(v) = v$. Soit A le point défini par $z = \overrightarrow{AO}$, de sorte que

$$\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)} = z + v + \overrightarrow{\varphi}(z) - z + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OA}) = v.$$

Posons $\psi = t_{-v} \circ \varphi$. On a $\psi(A) = t_{-v}(\varphi(A)) = A$ et donc ψ a des points fixes. De plus,

$$\psi \circ t_v \circ \psi^{-1} = t_{\overrightarrow{\psi}(v)} = t_{\overrightarrow{\varphi}(v)} = t_v$$

donc ψ et t_v commutent. La seule chose restant à vérifier est l'unicité du couple (v, ψ). Supposons donc que

$$\varphi = t_v \circ \psi = t_{v'} \circ \psi'$$

pour un ψ et un ψ' possédant des points fixes, disons $\psi(A) = A$ et $\psi'(A') = A'$, et pour deux vecteurs v, v' fixés par $\overrightarrow{\varphi}$. Alors $\overrightarrow{A\varphi(A)} = v$ et $\overrightarrow{A'\varphi(A')} = v'$, donc

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A')} + \overrightarrow{\varphi(A')A'} = v + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AA'}) - v'$$

et le vecteur $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AA'}) = v - v'$ est dans $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\overrightarrow{\varphi} - \mathrm{Id}_E) = 0$, donc $v = v'$ et $\psi = \psi'$. □

II.3. Groupe orthogonal

Le groupe $\mathrm{O}(E)$ des isométries de l'espace vectoriel euclidien E est appelé *groupe orthogonal de E*. Une base orthonormée[(4)] de E étant choisie, ce groupe s'identifie au groupe orthogonal de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, on le note alors $\mathrm{O}(n)$. On peut le considérer comme un groupe de matrices. Notons qu'en particulier, il est muni d'une topologie, celle induite par la topologie usuelle de l'espace vectoriel réel $M_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées.

Proposition II.3.1. *Une matrice A est dans le groupe $\mathrm{O}(n)$ si et seulement si elle vérifie la relation ${}^tAA = \mathrm{Id}$.*

[(4)] Il n'est sans doute pas trop tard pour rappeler qu'un espace euclidien possède des bases orthonormées, parce qu'il possède des bases et que l'on peut modifier n'importe quelle base pour en faire une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt, rappelé dans l'exercice II.23.

Démonstration. Dire que A est la matrice d'une isométrie, c'est dire que les images des vecteurs de la base canonique, autrement dit, les vecteurs colonnes de A, forment une base orthonormée. Or c'est précisément ce qu'exprime la relation ${}^tAA = \mathrm{Id}$: la nullité des termes hors de la diagonale dans la matrice ${}^tAA$ dit que deux vecteurs colonnes distincts sont orthogonaux, tandis que les termes diagonaux de cette matrice sont les carrés des normes des vecteurs colonnes. □

Remarque II.3.2. De façon plus intrinsèque, on aurait pu dire qu'un endomorphisme f de E est une isométrie si et seulement s'il vérifie la relation ${}^tff = \mathrm{Id}$ (je suggère aux lecteurs un peu versés en algèbre linéaire de donner un sens à cette relation et d'en trouver une démonstration n'utilisant pas les matrices, c'est-à-dire n'utilisant pas de base).

Corollaire II.3.3. *Le groupe* $\mathrm{O}(n)$ *est compact.*

Démonstration. Comme c'est une partie d'un espace vectoriel réel de dimension finie, il suffit de démontrer qu'il est fermé et borné. Mais l'application

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tAA \end{array}$$

est continue (les coefficients de ${}^tAA$ sont des polynômes en les coefficients de A) et $\mathrm{O}(n)$ est l'image réciproque de l'ensemble fermé $\{\mathrm{Id}\}$, il est donc fermé.

Comme tous les vecteurs colonnes des éléments de $\mathrm{O}(n)$ sont de norme 1, tous les coefficients ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1, en particulier, $\mathrm{O}(n)$ est une partie bornée de $M_n(\mathbf{R})$ (quelle que soit la norme utilisée sur cet espace vectoriel de dimension finie). □

Isométries positives

Le sous-groupe des déplacements vectoriels, qu'il est sans doute préférable d'appeler des *isométries positives*, est noté $\mathrm{O}^+(E)$, $\mathrm{O}^+(n)$ dans le cas de $\mathbf{R}^n$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(n)$, comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application « déterminant », qui est continue, puisque polynomiale en les coefficients des matrices. C'est aussi un sous-groupe ouvert de $\mathrm{O}(n)$, comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par le déterminant.

Le cas du plan

Le cas du groupe des isométries planes est particulièrement important : l'identification du groupe $\mathrm{O}^+(2)$ au groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1 et à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ est ce qu'on utilisera au chapitre III pour *mesurer* les angles.

Proposition II.3.4. *Le groupe* $\mathrm{O}^+(2)$ *est isomorphe et homéomorphe au groupe multiplicatif* $\mathbf{U}$ *des nombres complexes de module* 1.

Démonstration. Une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

est dans $\mathrm{O}(2)$ si et seulement si ses deux colonnes forment une base orthonormée, c'est-à-dire si et seulement si $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$, ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1 \text{ et } a^2 + b^2 = 1.$$

Un simple calcul montre que $\varepsilon = \text{dét}\, A$ et donc que $\varepsilon = 1$ si $A \in \mathrm{O}^+(2)$. Maintenant, il n'y a plus qu'à considérer l'application $\varphi : \mathrm{O}^+(2) \to \mathbf{U}$:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto a + ib.$$

On vérifie directement que c'est un homomorphisme de groupes en calculant $\varphi(AA')$. Elle est évidemment bijective et continue, de même que son application réciproque

$$\varphi^{-1} : a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et ceci achève la démonstration. □

Corollaire II.3.5. *Le groupe* $\mathrm{O}^+(2)$ *est commutatif.*

Démonstration. Il est isomorphe au groupe commutatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1. □

Remarque II.3.6. On aurait pu utiliser un autre isomorphisme $\varphi' : \mathrm{O}^+(2) \to \mathbf{U}$, en associant $a - ib$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. En d'autres termes, les deux groupes $\mathrm{O}^+(2)$ et $\mathbf{U}$ sont isomorphes, mais pas canoniquement, ce qui est lié au problème d'orientation que nous soulèverons au chapitre suivant.

Corollaire II.3.7. *Le groupe* $\mathrm{O}^+(2)$ *est connexe par arcs. Le groupe* $\mathrm{O}(2)$ *a deux composantes connexes par arcs.*

Démonstration. Le groupe des nombres complexes de module 1 est connexe par arcs (c'est un cercle). Il en est donc de même du groupe $\mathrm{O}^+(2)$, qui lui est homéomorphe. D'autre part, l'application déterminant

$$\text{dét} : \mathrm{O}(2) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

est continue comme on l'a déjà dit, elle prend ses valeurs dans un espace discret et elle est surjective. Donc $\mathrm{O}(2)$ n'est pas connexe, on peut l'écrire comme réunion disjointe $\mathrm{O}(2) = \mathrm{O}^+(2) \cup \mathrm{O}^-(2)$, en désignant par $\mathrm{O}^-(2)$ l'ensemble des isométries à déterminant négatif. On a déjà dit que $\mathrm{O}^+(2)$ est connexe par arcs. Mais $\mathrm{O}^-(2)$ est, lui aussi, connexe par arcs, tout simplement parce qu'il lui est homéomorphe : choisissons une fois pour toutes un élément $g_0 \in \mathrm{O}^-(2)$ (nous savons que $\mathrm{O}^-(2)$ n'est pas vide, puisqu'il contient les réflexions) et considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}^-(2) & \longrightarrow & \mathrm{O}^+(2) \\ f & \longmapsto & f \circ g_0. \end{array}$$

Elle est continue (pourquoi ?), bijective (même question) et son application réciproque est continue aussi (c'est clair ?), donc c'est un homéomorphisme, ce qui fait que $\mathrm{O}^-(2)$ est aussi connexe par arcs que $\mathrm{O}^+(2)$. □

Remarque II.3.8. La fin de l'argument, à savoir que $\mathrm{O}^-(2)$ est homéomorphe à $\mathrm{O}^+(2)$, fonctionne en dimension n quelconque, on va donc l'utiliser de la même manière pour montrer que $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes par arcs... dès qu'on aura montré que $\mathrm{O}^+(n)$ est connexe par arcs en général (proposition II.3.16 ci-dessous).

Rotations, mesures des angles des rotations

Grâce à l'exponentielle complexe, on définit une application

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathrm{O}^+(2) \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \end{array}$$

qui est, bien sûr, surjective et périodique de période 2π et qui définit un isomorphisme de groupes

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{O}^+(2).$$

Définition II.3.9. L'image du réel θ s'appelle *rotation d'angle* θ. Les isométries positives d'un plan euclidien sont appelées des *rotations*.

De ce qui précède, on déduit que tout élément de $\mathrm{O}(2)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1.$$

Remarque II.3.10. L'existence et la périodicité des fonctions « cosinus » et « sinus », même si elles ont été admises par les lectrices depuis leur plus jeune âge, ne sont pas des trivialités. Elles reposent, au choix

– sur les propriétés de l'exponentielle complexe définie par son développement en série entière (voir **[11]** ou l'époustouflant prologue de **[45]**),

– ou sur une définition précise de la mesure des longueurs des arcs de cercles (évoquée ici au § VIII.4).

Changement de base, conjugaison

Considérons maintenant un plan vectoriel euclidien E. En choisissant une base orthonormée, on obtient un isomorphisme (d'espaces vectoriels euclidiens) de E dans $\mathbf{R}^2$ et des isomorphismes de groupes de $\mathrm{O}(E)$ dans $\mathrm{O}(2)$ et de $\mathrm{O}^+(E)$ dans $\mathrm{O}^+(2)$. Il est important de remarquer que l'écriture des rotations planes dans une base orthonormée dépend assez peu de la base utilisée. On a plus précisément :

Proposition II.3.11. *Soit E un plan vectoriel euclidien et soit f une isométrie positive de E. On a les égalités :*

$$g \circ f \circ g^{-1} = \begin{cases} f & si\ g \in \mathrm{O}^+(E) \\ f^{-1} & si\ g \in \mathrm{O}^-(E). \end{cases}$$

Démonstration. La première égalité est une conséquence immédiate de la commutativité de $\mathrm{O}^+(E)$. Pour démontrer la deuxième, le plus simple est d'utiliser les formes matricielles mises en évidence ci-dessus. □

Remarque II.3.12. On a ainsi obtenu une nouvelle version du principe de transport par conjugaison (ici l'énoncé I.3.19).

Corollaire II.3.13. *Soit E un plan vectoriel orienté. La matrice d'une rotation ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe dans laquelle elle est écrite.*

Une orientation du plan étant fixée, choisissons une base orthonormée directe. Les changements de bases orthonormées directes sont ceux dont les matrices sont dans $\mathrm{O}^+(E)$ (voir au besoin l'exercice II.11). Il ne reste plus qu'à appliquer la première égalité de la proposition II.3.11. □

Réduction, le cas général

Considérons maintenant un espace vectoriel euclidien de dimension n. Les éléments du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ ont une forme un peu plus compliquée que ceux de $\mathrm{O}(2)$ mais on peut quand même les décrire assez explicitement pour en déduire des résultats analogues aux précédents.

Proposition II.3.14. *Soit f une isométrie vectorielle de E. L'espace vectoriel E est somme directe orthogonale*

$$E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_r,$$

égalité dans laquelle les sous-espaces V, W et P_i sont stables par f, où l'on a $f|_V = \mathrm{Id}_V$, $f|_W = -\mathrm{Id}_W$ et où chaque P_i est un plan en restriction auquel f est une rotation.

En termes de matrices, c'est dire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} & \end{pmatrix}.$$

On remarquera aussi qu'alors dét $f = (-1)^{\dim W}$ donc que W est de dimension paire pour une isométrie positive... et aussi que W n'est pas réduit à 0 pour une isométrie négative.

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, les isométries sont l'identité et la symétrie centrale $-\mathrm{Id}$ et donc le résultat est vrai ; pour $n = 2$, on a déjà dit qu'une isométrie était

- une réflexion, ce qui correspond à $\dim V = 1$, $\dim W = 1$ et $P_i = 0$
- ou une rotation, cas où $V = W = 0$ et $r = 1$

et le résultat est vrai aussi. On suppose maintenant (c'est l'hypothèse de récurrence) que le résultat est vrai pour toutes les isométries des espaces vectoriels euclidiens de dimension $\leq n - 1$.

Considérons une isométrie f d'un espace E de dimension $n \geq 3$. Il suffit de trouver un sous-espace F de E qui soit non trivial et stable par f. En effet, son orthogonal $F^\perp$ sera aussi stable par f et on pourra appliquer la récurrence à F et $F^\perp$.

Si f a une valeur propre réelle, la droite engendrée par un vecteur propre non nul convient pour F.

Sinon, soit λ une valeur propre complexe (supposée non réelle). Alors $\overline{\lambda}$ en est une aussi. Soit x un vecteur propre (complexe)[5] de f pour la valeur propre λ, de sorte que $\overline{x}$ est un vecteur propre pour $\overline{\lambda}$. Le plan complexe engendré par x et $\overline{x}$ est stable par f. Mais les deux vecteurs $(x+\overline{x})/2$ et $(x-\overline{x})/2i$ sont réels. Ils engendrent un plan de E (ils sont indépendants, c'est bien clair ?) qui est stable par f et qui convient pour F. □

Remarque II.3.15. Les lecteurs devraient maintenant comprendre pourquoi on a pris la peine d'initialiser la récurrence en considérant les cas $n=1$ *et* $n=2$.

Proposition II.3.16. *Le groupe* $\mathrm{O}^+(n)$ *est connexe par arcs. Le groupe* $\mathrm{O}(n)$ *a deux composantes connexes par arcs homéomorphes à* $\mathrm{O}^+(n)$.

Démonstration. On procède comme dans le cas $n=2$ (démonstration du corollaire II.3.7) : il suffit de montrer que $\mathrm{O}^+(n)$ est connexe par arcs, c'est-à-dire qu'on peut relier deux éléments de $\mathrm{O}^+(n)$ par un chemin dans $\mathrm{O}^+(n)$. Pour ça, il suffit bien sûr de montrer qu'on peut relier tout élément de $\mathrm{O}^+(n)$ à l'identité.

Soit donc A un élément de $\mathrm{O}^+(n)$. La proposition II.3.14 nous dit qu'il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ ait la forme ci-dessus. Comme $A \in \mathrm{O}^+(n)$, le nombre de -1 est pair, ce qui fait qu'on peut les grouper deux par deux et considérer que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ pour } \theta = \pi,$$

autrement dit, la matrice $B = {}^tPAP$ ne contient que des 1 et des blocs diagonaux de rotations.

Pour tout $t \in [0,1]$, formons maintenant une matrice $B(t) \in \mathrm{O}^+(n)$ en remplaçant les θ figurant dans B par $t\theta$, de sorte que $t \mapsto B(t)$ est un chemin continu de Id à B dans $\mathrm{O}^+(n)$... et, plus intéressant, que $t \mapsto PB(t){}^tP$ est un chemin continu de Id à A dans $\mathrm{O}^+(n)$, ce que nous cherchions. □

Pourquoi « déplacement » ?

Des résultats précédents, on déduit :

Proposition II.3.17. *Le groupe* $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ *des déplacements d'un espace affine euclidien* $\mathcal{E}$ *est connexe par arcs.*

[5] Quitte à choisir une base de E, on peut supposer qu'on est dans $\mathbf{R}^n$ et considérer celui-ci comme une partie de $\mathbf{C}^n$. On peut aussi construire un sous-espace stable F géométriquement (sans complexifier E), voir par exemple [**39**, exercice VI.5].

Remarque II.3.18. Cette proposition justifie l'emploi du mot « déplacement » pour ces isométries : un chemin reliant l'application identique au déplacement f permet de déplacer (au sens du français courant) un objet.

Démonstration. Le choix d'une origine O dans $\mathcal{E}$ permet de construire un homéomorphisme de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ dans l'espace produit $\mathrm{O}^+(E) \times E$. C'est simplement l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{O}^+(E) \times E \\ \varphi & \longmapsto & (\overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{O\varphi(O)}). \end{array}$$

Elle est continue ainsi que son application réciproque (penser à leurs expressions en coordonnées). Comme $\mathrm{O}^+(E)$ et E sont connexes par arcs, leur produit l'est. L'espace $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$, qui lui est homéomorphe, l'est donc aussi. □

Remarque II.3.19. On trouvera des informations complémentaires sur les propriétés et la topologie de $\mathrm{O}^+(n)$ et sur d'autres groupes classiques dans les exercices II.23, V.17, V.54, V.55, VI.50 et dans les livres [**39, 5, 36**].

Exercices et problèmes

Exercice II.1. On donne deux vecteurs x et y. Exprimer le fait que le nombre réel $\|\lambda x + y\|^2$ est positif ou nul pour tout scalaire λ. En déduire l'énoncé et une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en précisant le cas d'égalité). Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme et que d est une distance. Indiquer le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire et montrer que la ligne droite est le plus court chemin (par lignes brisées) d'un point à un autre.

Exercice II.2. Soient a, b et c trois nombres positifs tels que

$$|b - c| < a < b + c.$$

Montrer qu'il existe un triangle de côtés a, b, c.

Exercice II.3. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application (ensembliste) qui conserve le produit scalaire. Montrer que f est linéaire (et donc est une isométrie).

Exercice II.4. Montrer que G est le barycentre de $((A, \alpha), (B, 1 - \alpha))$ si et seulement si pour tout point O,

$$\alpha OA^2 + (1 - \alpha)OB^2 = OG^2 + \alpha GA^2 + (1 - \alpha)GB^2.$$

Exercice II.5. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application définie sur un espace affine euclidien. On suppose que φ préserve les distances :

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B).$$

Montrer que φ est affine (et que c'est donc une isométrie)[6].

Exercice II.6. Montrer qu'une symétrie n'est une isométrie que si c'est une symétrie orthogonale.

***Exercice II.7* (Réflexions, hyperplan médiateur).** Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel euclidien E et soit x_0 un vecteur non nul de $H^\perp$. Montrer que

$$s_H(x) = x - 2\frac{x \cdot x_0}{\|x_0\|^2} x_0.$$

Montrer que, si x et y sont deux vecteurs de même norme de l'espace vectoriel euclidien E, il existe un hyperplan H tel que $s_H(x) = y$ (et que H est unique si $x \neq y$). Montrer de même que, si A et B sont deux points d'un espace affine $\mathcal{E}$, il existe un hyperplan affine $\mathcal{H}$ tel que $\sigma_{\mathcal{H}}(A) = B$ (et que $\mathcal{H}$ est unique si $A \neq B$).

***Exercice II.8* (Régionnement du plan par la médiatrice).** Soient A et B deux points d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Montrer que l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{P} \mid MA < MB\}$$

est le demi-plan défini par la médiatrice du segment AB et contenant A (voir l'exercice I.48).

***Exercice II.9* (La « fonction scalaire » de Leibniz).** C'est le nom traditionnel de la fonction F, définie par le système de points pondérés $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$ et qui, au point M de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, associe le scalaire

$$F(M) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i MA_i^2.$$

On suppose que la somme $\sum \alpha_i$ est nulle. Montrer qu'il existe un vecteur fixe v tel que, pour tout point M' de $\mathcal{E}$,

$$F(M') = F(M) + 2\overrightarrow{MM'} \cdot v.$$

Si la somme $\sum \alpha_i$ n'est pas nulle, on appelle G le barycentre du système. Vérifier que

$$F(M) = F(G) + \left(\sum \alpha_i\right) MG^2.$$

[6] Ce n'est pas si facile...

Applications. On se donne un nombre réel k. Déterminer, selon les valeurs de k,

- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = k$,
- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 - MB^2 = k$,
- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\dfrac{MA}{MB} = k$.

***Exercice II.10* (Rappel sur les orientations).** Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les bases de l'espace vectoriel E. Si b et b' sont deux bases (deux éléments de $\mathcal{B}$), on dit qu'elles sont équivalentes si $\text{dét}_b\, b' > 0$. Montrer que c'est bien une relation d'équivalence et qu'il y a deux classes d'équivalence. *Orienter* l'espace E, c'est choisir une de ces deux classes. Les bases de la classe choisie sont dites *directes*.

Exercice II.11. Montrer que les déplacements sont les isométries qui préservent une orientation (toutes les orientations) de l'espace. Montrer que les réflexions renversent l'orientation.

Exercice II.12. Quelles sont les isométries positives du plan vectoriel euclidien qui sont involutives ?

Exercices dans le plan affine euclidien

Exercice II.13. Soit ABC un triangle. Construire un carré $MNPQ$ tel que M, $N \in BC$, $Q \in AB$, $P \in AC$.

Exercice II.14. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et soient A et B deux points en dehors de $\mathcal{D}$ et du même côté de $\mathcal{D}$. Construire un point M de $\mathcal{D}$ tel que $AM + MB$ soit minimal.

Exercice II.15. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles d'un plan affine euclidien et soient A et B deux points situés de part et d'autre de la bande délimitée par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Construire M sur $\mathcal{D}$ et M' sur $\mathcal{D}'$ tels que MM' ait une direction donnée et (successivement)

- d'abord tels que $AM = BM'$,
- puis tels que AM et BM' soient perpendiculaires,
- enfin tels que $AM + MM' + M'B$ soit minimal.

Dans chacun des cas, y a-t-il unicité de M ?

Exercice II.16. Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, trouver toutes les homothéties qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

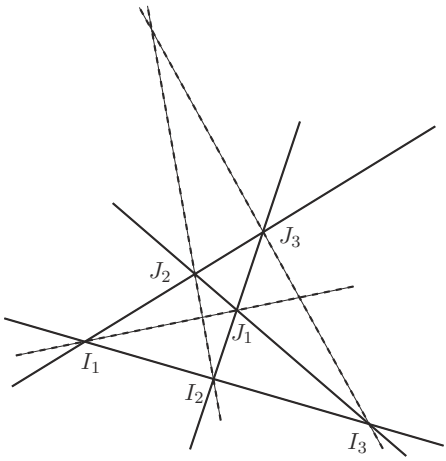


Figure 6

Exercice II.17. On donne trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ dont les centres ne sont pas alignés. On appelle I_1, I_2 et I_3 (resp. J_1, J_2 et J_3) les centres des homothéties de rapport positif (resp. négatif) envoyant $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_3$ sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$. Montrer que I_1, J_2 et J_3 (et de même I_2, J_3 et J_1, I_3, J_1 et J_2) ainsi que I_1, I_2 et I_3 sont alignés (voir la figure 6, sur laquelle on placera les centres des trois cercles).

Exercice II.18. Construire un cercle tangent à deux droites données et passant par un point donné.

***Exercice II.19* (Orthocentre).** Rappeler pourquoi les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes[(7)]. Considérer la figure 19 du chapitre I d'un œil euclidien et montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes[(8)].

Exercice II.20. Soit AB une corde d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer que le lieu des orthocentres H des triangles AMB (quand M parcourt $\mathcal{C}$) est le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à AB.

***Exercice II.21* (Cercle d'Euler).** Soit ABC un triangle, et soient G, O et H ses centre de gravité, centre du cercle circonscrit et orthocentre (respectivement). Toujours en pensant à la figure 19 du chapitre I, montrer que O, G et H sont alignés (sur une droite que l'on appelle la *droite d'Euler*) et, plus précisément,

(7) Le point de concours est le centre du *cercle circonscrit*.
(8) Le point de concours est l'*orthocentre*.

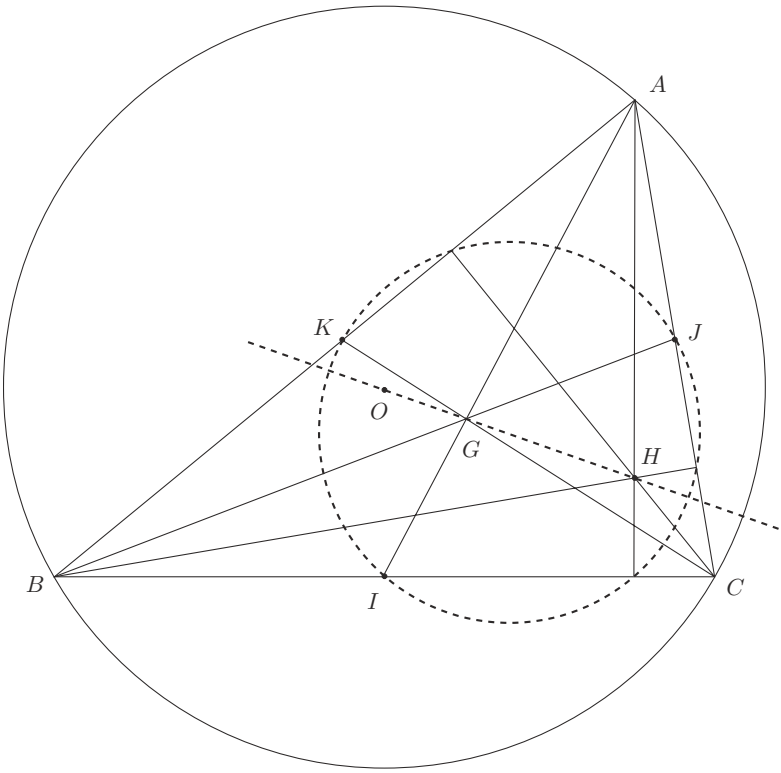


Figure 7. Le cercle et la droite d'Euler

qu'on a

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

On appelle I, J et K les milieux de BC, CA et AB et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle IJK (figure 7). Montrer qu'il passe aussi[9] par les pieds des hauteurs de ABC et par les milieux de AH, BH et CH.

Exercices un peu plus théoriques

***Exercice II.22* (Centres de $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{O}^+(n)$).** Soit g une isométrie de $\mathbf{R}^n$ qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{O}(n)$. Montrer que g préserve toutes les droites. En déduire que le centre de $\mathrm{O}(n)$ est formé de Id et $-\mathrm{Id}$. Quel est le centre de $\mathrm{O}^+(n)$? Et celui de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$?

[9] C'est pourquoi on appelle parfois ce cercle *cercle des neuf points*, bien qu'il contienne beaucoup plus de neuf points... et même beaucoup plus de neuf points « remarquables ».

***Exercice II.23* (Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer qu'il existe une unique base orthonormée, notée $(e_1, \ldots, e_n)$, de E telle que

– le sous-espace engendré par $(e_1, \ldots, e_k)$ coïncide avec celui engendré par $(x_1, \ldots, x_k)$ pour tout k,

– les bases $(e_1, \ldots, e_k)$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ définissent la même orientation de ce sous-espace.

Soit A une matrice réelle $n \times n$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $P = P(A)$, dépendant continûment de A, dont tous les termes diagonaux sont positifs et telle que AP soit dans $\mathrm{O}(n)$.

Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n; \mathbf{R})$ a deux composantes connexes.

***Exercice II.24* (Groupe de Lorentz).** On considère la forme quadratique[10]

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$$

sur $\mathbf{R}^n$. Caractériser les matrices des « isométries » de la forme q, c'est-à-dire des isomorphismes linéaires f tels que $q \circ f(x) = q(x)$ pour tout x dans $\mathbf{R}^n$. On appelle O_q le groupe de ces isométries.

Déterminer les éléments de O_q quand $n = 2$. Pensez-vous que O_q soit un groupe compact ?

On suppose $n = 2$. On appelle O_q^+ le groupe des isométries de q dont le déterminant est positif. Combien a-t-il de composantes connexes ? Même question pour O_q.

[10] Voir au besoin le § VII.7 pour des rappels sur les formes quadratiques.

III

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

Dans ce chapitre, il y a des isométries planes, des triangles et des angles inscrits, des similitudes, des inversions et même des faisceaux de cercles. Mais il y a aussi, et il faut bien commencer par ça, des précisions sur ce qu'est un angle et comment on le mesure. Les démonstrations sont, certes, très simples, mais les énoncés et leur précision sont délicats et importants.

III.1. Angles

L'idée intuitive que nous avons d'un angle comme partie du plan contenue entre deux demi-droites de même origine est assez inadaptée à une utilisation rigoureuse. Il semble que la meilleure définition de cet « écartement » entre les deux demi-droites soit *via* le déplacement qui fait passer de l'une à l'autre.

Elle permet en tout cas de munir l'ensemble des angles d'une structure de groupe et de *mesurer* les angles, c'est-à-dire d'associer à chaque angle un nombre réel (hélas, pas unique !) et ceci de façon additive.

Notations et rappels

On se place dans un plan euclidien P. On utilise les notations du chapitre précédent. Les isométries vectorielles positives du plan sont, on l'a vu au § II.3, les rotations. On réservera le mot « déplacement » aux isométries *affines*.

La remarque de base est la proposition suivante.

Proposition III.1.1. *Étant donnés deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel, il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre.*

Remarque III.1.2. L'énoncé analogue en dimension 3 (ou plus) est *faux !* C'est ce qui fait la particularité de la dimension 2 pour les angles.

Démonstration de la proposition. Soient u et u' deux vecteurs unitaires de P. Soit v un vecteur unitaire tel que (u, v) soit une base orthonormée. Alors u' s'écrit dans cette base :

$$u' = au + bv$$

avec $a^2 + b^2 = 1$ puisque u' est unitaire. La rotation f dont la matrice dans la base (u, v) est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ vérifie $f(u) = u'$ et est la seule à le faire (elle est déterminée par a et b). □

On peut maintenant se demander, étant donnés *deux* couples de vecteurs unitaires (u, v), (u', v'), s'il existe une rotation qui envoie u sur u' et v sur v'. La réponse est bien sûr négative en général et c'est là que se cachent les angles.

Angles orientés de vecteurs

On définit une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires par $(u, v)\mathcal{R}_1(u', v')$ si et seulement si il existe une rotation f de P telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$.

La classe d'équivalence de (u, v) est appelée l'*angle orienté* de u et v, mais aussi l'angle orienté de u' et v' pour tous les vecteurs $u' = \lambda v$, $v' = \mu v$ (avec λ et $\mu > 0$)[1]. Pour ne pas utiliser trop de notations, on note (u, v) la classe de (u, v) en espérant qu'il n'y aura pas de confusion.

On appelle $\widehat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires et $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés de vecteurs (les classes d'équivalence sous $\mathcal{R}_1$). On veut maintenant définir une structure de groupe sur $\mathcal{A}$. En fait, cet ensemble ressemble beaucoup à $\mathrm{O}^+(P)$, qui lui, est un groupe. La proposition III.1.1 permet en effet de définir une application

$$\widehat{\Phi} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathrm{O}^+(P)$$

qui, au couple (u, u'), associe l'unique rotation f qui envoie u sur u'. On a alors :

Lemme III.1.3. *Pour que les couples (u, u') et (v, v') aient la même image par $\widehat{\Phi}$, il faut et il suffit qu'ils définissent le même angle orienté.*

Démonstration. Soient f et g les rotations définies (grâce à la proposition III.1.1) par

$$f(u) = u', \quad g(v) = v'$$

[1] De sorte que les homothéties préservent les angles orientés de vecteurs, par définition.

et soient r et r' celles définies par

$$r(u) = v, \quad r'(u') = v'$$

(figure 1). Dire que l'on a $\widehat{\Phi}(u, u') = \widehat{\Phi}(v, v')$, c'est dire que les rotations r et r' sont égales. Dire que les angles orientés (u, u') et (v, v') sont égaux, c'est dire qu'ils vérifient $(u, u')\mathcal{R}_1(v, v')$, c'est-à-dire que f et g sont égales.

La rotation $r' \circ f$ envoie u sur v', de même que $g \circ r$. Par unicité dans la proposition III.1.1, on a donc $r' \circ f = r \circ g$ et, comme $\mathrm{O}^+(P)$ est commutatif (proposition II.3.5), $r' \circ f = r \circ g$, d'où l'on déduit bien que $r = r'$ si et seulement si $f = g$. □

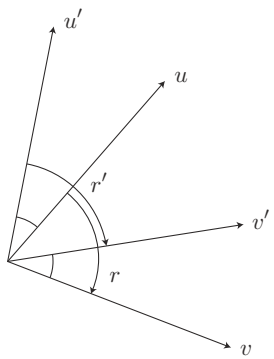


Figure 1

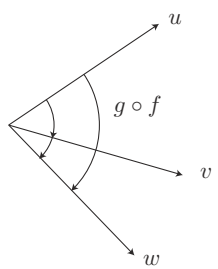


Figure 2

Le lemme affirme que l'application $\widehat{\Phi}$ définit bien une application

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{O}^+(P),$$

qui est *bijective*, l'application réciproque associant à la rotation f l'angle $(u, f(u))$ (pour n'importe quel vecteur unitaire u). Comme $\mathrm{O}^+(P)$ est un groupe (commutatif), on en déduit une structure de groupe (commutatif), notée additivement, sur $\mathcal{A}$:

$$(u, v) + (u', v') = (u'', v'')$$

où u'' est un vecteur unitaire arbitraire et $v'' = r' \circ r(u'')$, r et r' étant définies par

$$v = r(u) \text{ et } v' = r'(u').$$

Remarque III.1.4. C'est ce qu'on appelle un *transport de structure* : on transporte par Φ la structure de groupe de $\mathrm{O}^+(P)$. La formule donnée est équivalente à :

$$(u, v) + (u', v') = \Phi^{-1}\left(\Phi(u, v) \circ \Phi(u', v')\right).$$

Elle métamorphose la bijection Φ en un isomorphisme de groupes.

L'angle nul est celui qui correspond à la rotation identité, soit (u, u). On appelle *angle plat* l'angle $(u, -u)$, qui correspond à la symétrie centrale $-\operatorname{Id}$. C'est un élément d'ordre 2 du groupe $\mathcal{A}$. En effet, on a

$$2(u, -u) = 0 \text{ puisque } (-\operatorname{Id}) \circ (-\operatorname{Id}) = \operatorname{Id}.$$

Un angle (u, v) tel que $2(u, v) = (u, -u)$ est dit *angle droit*. Ces angles correspondent aux rotations f telles que $f \circ f = -\operatorname{Id}$. On résout aisément l'équation

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui donne $a = 0$ et $b = \pm 1$ (en nombres complexes, voir le § II.3, on vient de résoudre $z^2 = -1$). Il y a deux angles droits, l'angle (u, v) est droit si et seulement si u et v sont orthogonaux (c'est-à-dire si et seulement s'ils vérifient $u \cdot v = 0$).

Notons encore la propriété :

***Proposition III.1.5* (Relation de Chasles).** *Dans le groupe $\mathcal{A}$ des angles orientés de vecteurs, on a*

$$(u, v) + (v, w) = (u, w)$$

pour tous vecteurs unitaires u, v et w.

Démonstration. Si les rotations f et g vérifient les relations $f(u) = v$ et $g(v) = w$, alors la composée $g \circ f$ vérifie $g \circ f(u) = w$ (figure 2). □

Remarque III.1.6. On aurait pu *définir* la structure de groupe par la relation de Chasles.

Angles orientés de droites

On a envie d'appeler angle orienté des deux droites affines (d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$) ou vectorielles (du plan vectoriel euclidien P) D et D' l'angle orienté de deux de leurs vecteurs unitaires. Malheureusement, il y a deux vecteurs unitaires sur une droite. On définit donc l'angle orienté (D, D') comme la classe d'équivalence de (u, u') (où u dirige D et u' dirige D') sous la relation $\mathcal{R}_2$ définie par :

$$(u, u')\mathcal{R}_2(v, v') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (u, u')\mathcal{R}_1(v, v') \\ \text{ou} \\ (u, u')\mathcal{R}_1(-v, v'). \end{cases}$$

L'ensemble des angles orientés de droites est un groupe, simplement comme quotient du groupe $\mathcal{A}$ par le sous-groupe d'ordre 2 engendré par l'angle plat. On a, par définition :

Proposition III.1.7. *Soient D, D', Δ et Δ' des droites de vecteurs directeurs unitaires u, u', v et v' respectivement. On a l'égalité $2(u,u') = 2(v,v')$ dans $\mathcal{A}$ si et seulement si les angles orientés de droites (D,D') et (Δ,Δ') sont égaux.* □

On exprime parfois cette propriété par « quand on divise une égalité d'angles orientés de vecteurs par 2, on trouve une égalité d'angles orientés de droites ».

On remarquera que, si (D,D') est un angle de droites, $2(D,D')$ est un élément bien défini du groupe $\mathcal{A}$ des angles orientés de vecteurs.

Orientations du plan et mesure des angles orientés

Attention à la terminologie, un peu trompeuse. Répétons que nous avons défini des angles *orientés* (de vecteurs, de droites) sans avoir eu besoin d'orienter le plan. Nous l'orientons maintenant, pour *mesurer* ces angles. Choisissons donc une orientation du plan vectoriel P. La matrice d'une rotation f est la même dans toutes les bases orthonormées *directes* (voir le corollaire II.3.13). À l'angle (u,v) est alors associée, par Φ, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un nombre réel, bien défini modulo 2π, qu'on a appelé angle de la rotation f et qu'on appelle ici *une mesure de l'angle* (u,v).

Remarques III.1.8

– Tout angle orienté de vecteurs possède des mesures : c'est dire que l'application composée

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathrm{O}^+(P) \to \mathcal{A}$$

est surjective.

– Si θ est une mesure de l'angle (u,v), toutes les autres mesures de cet angle sont les $\theta + 2k\pi$, pour $k \in \mathbf{Z}$: c'est dire que l'application

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathrm{O}^+(P) \to \mathcal{A}$$

est injective.

– Les mesures d'un angle dépendent de l'orientation choisie : si θ est une mesure de l'angle (u,v) et si on choisit l'autre orientation, ce sont les $-\theta + 2k\pi$ qui sont ses mesures.

– Le nombre π est une mesure de l'angle plat,

– les angles droits ont pour mesures les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou les $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

– la base (u, u') est orthonormée directe si et seulement si $\pi/2$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs (u, u').

On peut aussi mesurer les angles de droites. Comme on vient de dire que π est une mesure de l'angle plat, les mesures sont, pour les angles de droites, les éléments de $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$.

Remarque III.1.9. La proposition III.1.7 se traduit très simplement en termes de mesures des angles par l'équivalence

$$2\theta \equiv 2\varphi \mod 2\pi \Longleftrightarrow \theta \equiv \varphi \mod \pi,$$

ce qui veut tout simplement dire qu'il existe un entier k tel que l'égalité $2\theta = 2\varphi + 2k\pi$ ait lieu si et seulement si il existe un entier ℓ tel que l'on ait $\theta = \varphi + \ell\pi$. On en retiendra que quand on divise une congruence, il faut tout diviser !

Si l'on parle de *mesurer* les angles, c'est qu'il y a une propriété d'additivité. Des définitions et constructions précédentes, on déduit en effet :

Proposition III.1.10. *L'application qui, à un angle orienté de vecteurs (resp. de droites) associe une de ses mesures, définit un homomorphisme du groupe des angles orientés dans* $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ *(resp. dans* $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$*). Cet homomorphisme dépend de l'orientation choisie. C'est un isomorphisme.* □

Bissectrices

La réunion de deux droites (vectorielles, ou affines sécantes[(2)]) distinctes D et D' possède deux axes de symétrie, les deux droites engendrées par les vecteurs $u + u'$ et $u - u'$ pour un choix quelconque de vecteurs unitaires $u \in D$, $u' \in D'$. Ces deux droites sont orthogonales, leur réunion est l'ensemble des points M du plan qui sont équidistants de D et D' (figure 3).

De plus, ce sont des *bissectrices* de la réunion $D \cup D'$ au sens où, si Δ est l'une de ces deux droites, on a l'égalité d'angles orientés de droites $(D, \Delta) = (\Delta, D')$. C'est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition III.1.11. *Les réflexions renversent les angles orientés (de vecteurs ou de droites).*

[(2)] La réunion de deux droites parallèles possède, elle, beaucoup plus d'axes de symétrie.

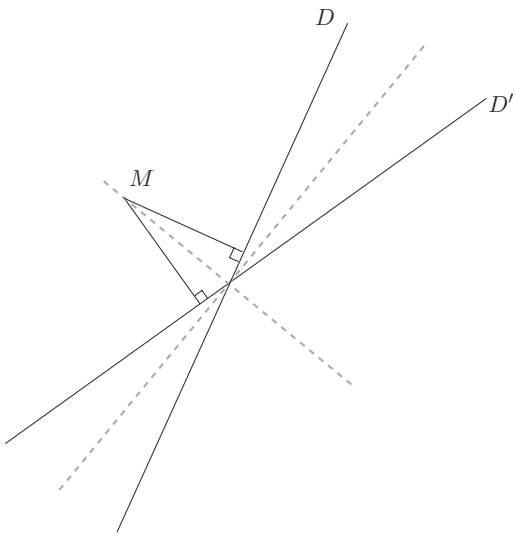


Figure 3. Bissectrices

Démonstration. On considère une droite vectorielle D et deux vecteurs unitaires u, v. On veut montrer que

$$(s_D(u), s_D(v)) = (v, u).$$

Considérons la médiatrice D' de u et v, c'est-à-dire la droite vectorielle $(u - v)^\perp$. La composition $s_D \circ s_{D'}$ est une isométrie positive, donc une rotation et donc

$$(v, u) = (s_D \circ s_{D'}(v), s_D \circ s_{D'}(u)) = (s_D(u), s_D(v)). \qquad \square$$

On retiendra qu'un angle de droites a deux bissectrices et qu'il n'y a aucun moyen de les distinguer l'une de l'autre.

Angles géométriques et bissectrice intérieure

Pour définir un angle géométrique, on confond tout simplement les angles (u, v) et (v, u). On remarquera qu'on n'a plus de structure de groupe (mais qu'il reste des notions d'angle plat, d'angles droits). Comme conséquence des résultats précédents, on obtient immédiatement :

Proposition III.1.12. *Les isométries conservent les angles géométriques.* $\square$

On pourra penser à un angle géométrique non plat comme à la partie convexe du plan contenue entre les deux demi-droites engendrées par les vecteurs u et u', précisément, l'enveloppe convexe de la réunion des deux demi-droites (voir le § I.6

et la figure 4). Je ferai l'abus de langage consistant à appeler « angle géométrique » cette enveloppe convexe, à isométrie près, bien entendu.

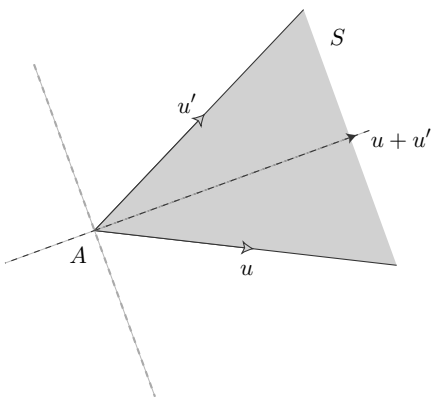


Figure 4. Bissectrices d'un angle géométrique

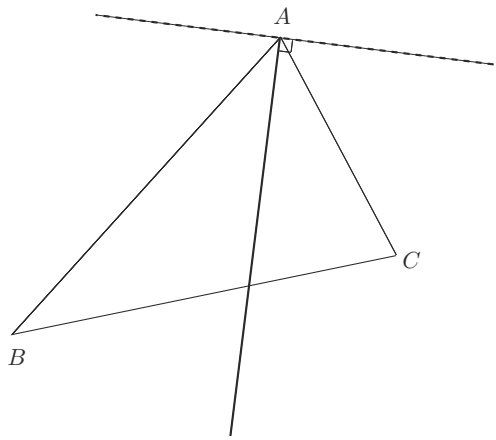


Figure 5. Bissectrices d'un angle d'un triangle

Remarquons enfin qu'on peut définir une bissectrice *intérieure* pour un angle géométrique qui n'est pas plat.

Proposition III.1.13. *Si d et d' sont deux demi-droites d'origine A qui forment un angle géométrique non plat, une seule des deux bissectrices de l'angle des droites supportant d et d' rencontre l'angle géométrique déterminé par d et d' ailleurs qu'en A.*

Démonstration. Appelons S l'enveloppe convexe de la réunion des demi-droites d et d'. Soient u et u' des vecteurs unitaires dirigeant d et d'. Les bissectrices des deux droites engendrées par u et u' sont les droites passant par A et dirigées par $u+u'$ et $u-u'$. Comme S est l'enveloppe convexe de $d \cup d'$, tous les points M de la demi-droite d'origine A engendrée par $u+u'$, vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = \lambda(u+u') \text{ avec } \lambda \geq 0,$$

sont dans S (voir la proposition I.6.6). La bissectrice définie par $u+u'$ rencontre donc S le long d'une demi-droite (voir la figure 4). On l'appelle la *bissectrice intérieure*.

Montrons que l'autre bissectrice (la *bissectrice extérieure*) ne rencontre S qu'en A. Rappelons que l'enveloppe convexe S est constituée des barycentres des points de $d \cup d'$ affectés de coefficients positifs ou nuls (toujours la proposition I.6.6),

c'est-à-dire ici des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda u + \lambda' u' \text{ avec } \lambda \geq 0 \text{ et } \lambda' \geq 0.$$

La droite passant par A et engendrée par $u - u'$, elle, est formée des points M vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = \mu(u - u') \text{ avec } \mu \in \mathbf{R}.$$

Elles ne se rencontrent donc qu'en A. □

Dans un triangle, on appelle angles géométriques les angles géométriques des demi-droites ou des vecteurs qui dirigent les côtés du triangle. De la proposition précédente, on déduit :

Proposition III.1.14. *Une (et une seule) des deux bissectrices de l'angle en A du triangle ABC rencontre le* segment BC. *C'est la bissectrice intérieure de cet angle.*

Le segment BC est en effet contenu dans l'enveloppe convexe des demi-droites d'origine A définissant l'angle en A (figure 5). □

« Mesure des angles géométriques »

À un angle géométrique défini par deux vecteurs u et v, on peut associer un nombre : l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que θ soit une mesure d'un des deux angles orientés (u, v) ou (v, u). C'est ce qu'on repère avec un rapporteur[(3)]. On parlera aussi de *mesure* dans ce cas, bien que ce soit un peu impropre : la mesure ainsi définie n'est pas additive, et d'ailleurs on ne peut pas ajouter des angles géométriques trop grands. Voir la figure 6 où deux angles géométriques de mesure $\pi - \varepsilon$ s'ajoutent (?) pour donner un angle géométrique de mesure 2ε !

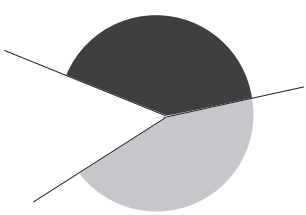


Figure 6

[(3)] Avec une échelle différente dans laquelle π vaut 180.

Pour la suite de ce chapitre, même si ce n'est pas explicitement dit, nous nous plaçons dans un plan affine euclidien, que nous supposerons avoir orienté quand il sera question de mesurer des angles.

Rappel de quelques théorèmes sur les angles

Après la sécheresse des sorites précédents, rafraîchissons-nous avec quelques théorèmes de géométrie.

Proposition III.1.15. *Soient A, B et C trois points distincts d'un plan affine euclidien. La somme des angles orientés de vecteurs*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

est un angle plat.

Démonstration. C'est simplement la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \\ &\text{grâce à une symétrie centrale} \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \text{ grâce à la relation de Chasles.}\end{aligned}$$

□

On peut donner une démonstration à peine plus compliquée, qui a un intérêt historique (voir la remarque III.1.17) et permet de démontrer un résultat un peu plus précis.

On trace la parallèle à BC passant par A, sur laquelle on définit un point D par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Si E vérifie $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}$, on a $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

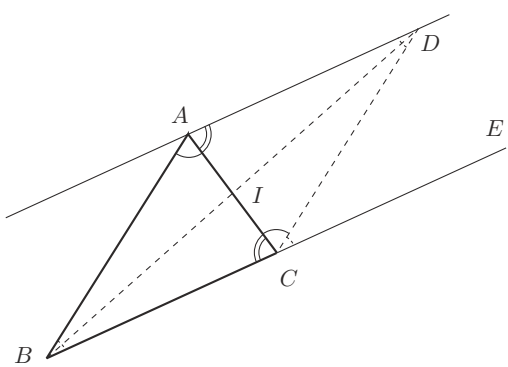


Figure 7

Soit I le milieu commun de BD et AC. La symétrie de centre I envoie A sur C et B sur D, de sorte que $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Ainsi l'angle plat $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})$ est la somme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. □

En regardant cette démonstration d'un peu plus près, on peut démontrer :

Corollaire III.1.16. *Soient A, B et C trois points distincts d'un plan affine euclidien orienté. Si α, β et γ sont des mesures des angles de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, elles vérifient l'égalité*

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \pi \quad (2\pi)$$

et la somme des mesures des angles géométriques est exactement π.

La dernière assertion est laissée aux lectrices (un exercice facile, mais peu agréable). □

Remarque III.1.17. C'est un résultat *euclidien* en les deux sens (postulat des parallèles/produit scalaire) du terme. Il est lié au postulat des parallèles, puisqu'on a utilisé *la* parallèle à BC passant par A pour le démontrer. On évoquera plus loin (corollaire V.3.2 et exercice VI.52) des « géométries » dans lesquelles cet énoncé est mis en défaut.

***Proposition III.1.18* (Angles inscrits).** *Si A, B et C sont trois points distincts d'un cercle de centre O, on a l'égalité d'angles orientés de vecteurs*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

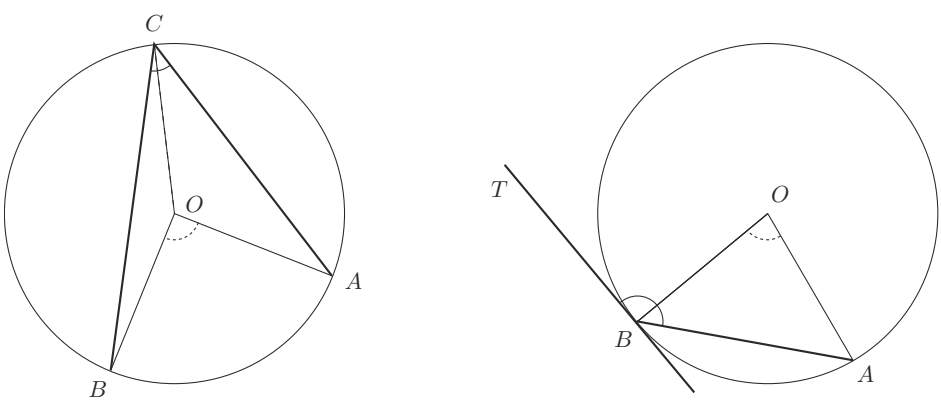


Figure 8. Angles inscrits

Démonstration. Comme O est sur la médiatrice de AC, la réflexion par rapport à cette médiatrice nous donne $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})$ (c'est l'exercice III.18) et la proposition sur la somme des angles nous dit que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})$$

est un angle plat. Mais O est aussi sur la médiatrice de BC, ce qui donne de même que

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO})$$

est aussi un angle plat. En ajoutant ces deux relations, on obtient que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) + 2\left((\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO})\right) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 0,$$

ce que nous voulions démontrer. □

Dans cet énoncé, le point C peut coïncider avec B, la droite BC doit alors être remplacée par la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en B, c'est-à-dire la perpendiculaire à OB passant par B (voir la figure 8). On peut remplacer $\overrightarrow{CB}$ par n'importe quel vecteur directeur $\overrightarrow{TB}$ de cette droite : les angles de vecteurs faisant intervenir $\overrightarrow{CB}$ dans la démonstration arrivent tous munis d'un facteur 2, de sorte que le sens du vecteur $\overrightarrow{TB}$ n'a aucune importance. On démontre ainsi :

Proposition III.1.19. *Si $\mathcal{D}$ est la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et si A est un point de $\mathcal{C}$ distinct de B, on a l'égalité d'angles*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(AB, \mathcal{D}).$$ □

Démonstration. On raisonne comme ci-dessus dans le triangle isocèle OAB,

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \text{ est plat}$$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$, donc

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) \text{ est plat.}$$

Mais $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à OB, donc

$$2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + 2(BA, \mathcal{D}) \text{ est plat lui aussi,}$$

de sorte que l'on a bien $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(AB, \mathcal{D})$. □

On déduit de ces résultats un critère de cocyclicité :

***Corollaire III.1.20* (Cocyclicité).** *Soient A, B et C trois points non alignés. Un point D est sur le cercle qu'ils déterminent si et seulement si les angles de droites (CA, CB) et (DA, DB) sont égaux.*

Corollaire III.1.21. *Les angles de droites (CA, CB) et (DA, DB) sont égaux si et seulement si les quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés.* □

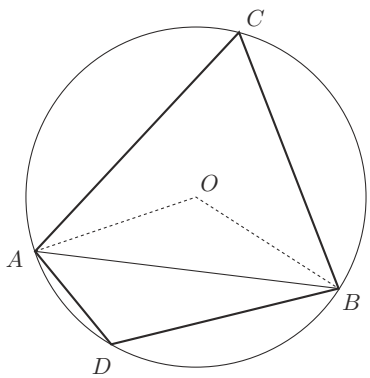


Figure 9

Démonstration du corollaire III.1.20. Supposons d'abord que D soit sur le cercle circonscrit au triangle ABC. On applique deux fois la proposition III.1.18, en d'autres termes on écrit les égalités

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$$

où O est le centre du cercle. On divise ensuite l'égalité d'angles de vecteurs obtenue par 2... ce qui la transforme automatiquement en une égalité d'angles de droites (c'est la proposition III.1.7). Réciproquement, supposons l'égalité d'angles vérifiée. Appelons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et O' celui du cercle circonscrit à ABD (à cause de l'égalité d'angles, A, B et D ne sont pas alignés). Grâce à la proposition III.1.19, les tangentes en B à ces deux cercles coïncident. Mais alors, les points O et O' aussi : ils sont à l'intersection de cette tangente avec la médiatrice du segment AB. Donc les deux cercles coïncident et les quatre points sont cocycliques. □

III.2. Isométries et déplacements du plan

Munis de ces nouveaux outils, revenons aux théorèmes de structure des isométries du § II.2 dans le cas du plan.

Commençons par le cas vectoriel.

Les isométries vectorielles

Le théorème II.2.1 affirme qu'elles sont composées d'une ou de deux réflexions. La composée de deux réflexions est une isométrie positive, donc une rotation vectorielle (voir le § II.3). Il n'y a pas grand chose à ajouter !

Remarquons quand même que la rotation composée des réflexions $s_{D'}$ et s_D ne dépend *que* de l'angle orienté de droites (D, D'). En effet, si u est un vecteur unitaire, on a l'égalité (dans le groupe des angles orientés de vecteurs)

$$(u, s_{D'} \circ s_D(u)) = 2(D, D').$$

Démonstration. Par définition des angles, celui formé par u et son image ne dépend pas du choix de u. On choisit donc celui-ci sur D. On choisit aussi un vecteur unitaire u' sur D'. Ainsi

$$\begin{array}{rcl}
(u, s_{D'} \circ s_D(u)) & = & (u, s_{D'}(u)) \\
& = & (u, u') + (u', s_{D'}(u)) \\
& = & (u, u') + (u, u') \\
& & \text{car } (u', s_{D'}(u)) = (s_{D'}(u'), s_{D'}(u)) = (u, s_{D'}(u')) \\
& = & 2(u, u')
\end{array}$$

grâce à la proposition III.1.11. □

Les isométries affines

Il s'agit, en vertu du théorème II.2.2, des composées d'une, de deux ou de trois réflexions. Soit φ une isométrie affine du plan et soit $\overrightarrow{\varphi}$ l'isométrie vectorielle associée. Alors, d'après l'étude vectorielle qui précède, $\overrightarrow{\varphi}$ est

- l'identité
- ou une réflexion
- ou une rotation vectorielle.

Examinons donc ces trois cas.

- Si $\overrightarrow{\varphi}$ est l'identité, φ est une translation.
- Si $\overrightarrow{\varphi}$ est une réflexion de droite D, alors :
  - soit φ a un point fixe A ; on vectorialise le plan affine en A et on applique le résultat vectoriel correspondant pour obtenir que φ est la réflexion par rapport à la droite passant par A et dirigée par D ;
  - soit φ n'a pas de point fixe ; on peut alors se tourner vers les résultats généraux sur les isométries affines. Ici, $\overrightarrow{\varphi}$ étant une réflexion, elle a des vecteurs fixes non nuls (tous ceux de D) et on peut lui appliquer la proposition II.2.8 ;

il existe donc un unique vecteur v de D et une unique réflexion ψ de droite dirigée par D telle que $\varphi = t_v \circ \psi = \psi \circ t_v$; l'isométrie φ est une *symétrie glissée* orthogonale (représentée sur la figure 10, voir aussi l'exercice I.21).

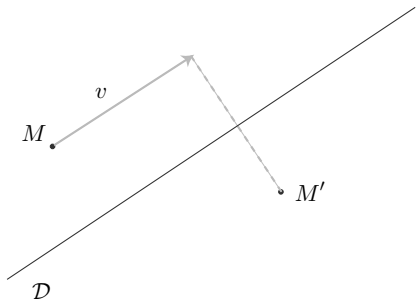


Figure 10. Symétrie glissée orthogonale

– Si $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation vectorielle (autre que l'identité), elle n'a aucun vecteur fixe non nul. D'après la proposition I.3.20, φ a un unique point fixe A. Il suffit de vectorialiser le plan affine en A pour que φ agisse comme $\overrightarrow{\varphi}$. On dit donc que c'est une *rotation* (affine) de centre A. Si le plan est orienté et si $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation d'angle θ, on dit que φ est une rotation de centre A et d'angle θ (notation $\rho_{A,\theta}$).

Pour résumer

Les isométries affines du plan affine euclidien sont les translations, les rotations, les réflexions et les symétries glissées. On peut dresser le tableau suivant :

	translations	rotations	réflexions	symétries glissées
ensemble invariant	pas de point invariant	un unique point fixe	une droite de points fixes	pas de point fixe
droites invariantes	une direction de droites	pas de droite invariante	et une direction de droites	une unique droite invariante
décomposition en réflexions	2 droites parallèles	2 droites sécantes	1 droite	3 droites

Compléments

La composée de deux rotations affines a pour isométrie linéaire associée une rotation vectorielle (celles-ci forment un groupe !), c'est donc une translation (quand la somme des angles des deux rotations est nulle modulo 2π) ou une rotation (dans le cas contraire). Voici une manière géométrique de trouver son centre.

On écrit chacune des deux rotations $\rho_{A,\alpha}$ et $\rho_{B,\beta}$ comme composée de deux réflexions. Pour $\rho_{A,\alpha}$, les deux droites passent par A et on peut en choisir une arbitrairement. De même pour $\rho_{B,\beta}$, avec deux droites passant par B. La solution s'impose d'elle-même : on appelle $\mathcal{D}$ la droite AB, $\mathcal{D}'$ est la droite passant par A et telle que $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \equiv \alpha/2$ modulo π, $\mathcal{D}''$ est la droite passant par B telle que $(\mathcal{D}'', \mathcal{D}) \equiv \beta/2$ modulo π, de sorte que l'on a

$$\rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\beta} = (\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}) \circ (\sigma_{\mathcal{D}} \circ \sigma_{\mathcal{D}''}) = \sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}''}.$$

Le centre de la rotation composée est le point d'intersection de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$. On vérifiera sans mal que l'angle de droites $(\mathcal{D}'', \mathcal{D}')$ est effectivement de mesure $(\alpha + \beta)/2$ modulo π (figure 11).

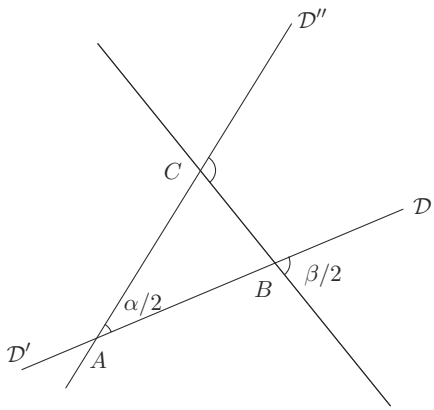


Figure 11

La composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est, on l'a dit, une translation. Déterminons le vecteur de cette translation. Choisissons un point A de $\mathcal{D}$ et un point A' de $\mathcal{D}'$ de façon que AA' soit perpendiculaire à $\mathcal{D}$. La composée des deux réflexions $\sigma_{\mathcal{D}'} \circ \sigma_{\mathcal{D}}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$ (figure 12). Remarquons au passage que cette translation ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{AA'}$: on peut fixer l'une des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ arbitrairement (elle doit quand même être orthogonale à AA').

Le dernier complément est consacré à l'écriture des rotations en nombres complexes. Un repère orthonormé (c'est-à-dire une base orthonormée et une origine) étant choisi, on peut identifier le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ à $\mathbf{C}$. Au point de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $x + iy$, son *affixe*. Attention ! Tout ce qui suit repose sur le (et dépend donc du) choix de ce repère.

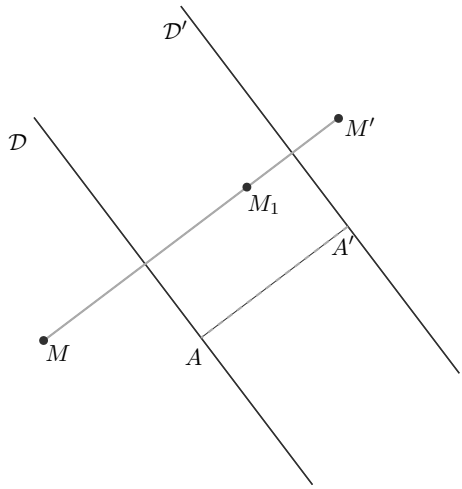


Figure 12

Pour alléger les notations, le plus simple est d'utiliser les lettres minuscules pour les affixes des points désignés par les lettres majuscules correspondantes, autrement dit, comme d'habitude, a est l'affixe de A, b celui de B... et z celui de M (!). Ainsi la formule

$$z' = a + e^{i\theta}(z - a)$$

décrit l'affixe de l'image M' de M par la rotation de centre A et d'angle θ.

III.3. Similitudes planes

On introduit maintenant des transformations un peu plus générales que les isométries, puisqu'elles englobent aussi les homothéties, les *similitudes*.

Définition III.3.1. Un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien est une *similitude* vectorielle s'il existe un réel strictement positif k, appelé *rapport* de la similitude, tel que, pour tout vecteur x de E,

$$\|f(x)\| = k\,\|x\|\,.$$

On l'a dit, les isométries et les homothéties sont des similitudes (attention, le rapport de similitude de l'homothétie de rapport λ est $|\lambda|$). Et d'une certaine façon, c'est tout :

Proposition III.3.2. *Soit f une similitude vectorielle de rapport k. Il existe une unique isométrie vectorielle u telle que $f = h_k \circ u$.*

Démonstration. Comme on a supposé $k > 0$, l'homothétie h_k est inversible. On définit u par $u = h_{k^{-1}} \circ f$, de sorte que u est un endomorphisme et préserve la norme. □

Notons qu'en particulier les similitudes vectorielles sont bijectives. Il est clair aussi qu'elles forment un groupe.

Une similitude f est dite *directe* ou *indirecte* selon que son déterminant est positif ou négatif.

Remarque III.3.3. La définition III.3.1 donnée ici des similitudes a un sens en toute dimension et la proposition III.3.2 est vraie en toute généralité. Pour ce qui va suivre, il faut vraiment se placer dans le cas du plan.

Proposition III.3.4. *Toute similitude vectorielle directe est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation vectorielle. Toute similitude vectorielle indirecte est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une réflexion.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la liste des isométries vectorielles planes une fois qu'on a remarqué que

$$\text{dét}(h_k \circ u) = k^2 \,\text{dét}(u)$$

et donc que u est une isométrie positive si et seulement si la similitude f est directe. □

Passons maintenant aux similitudes affines. On les définit comme les applications affines[4] $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ pour lesquelles il existe un nombre réel positif k tel que, pour tous points M et N d'images M' et N', on ait

$$M'N' = kMN,$$

ou, ce qui est équivalent, celles dont l'application linéaire associée est une similitude vectorielle. Bien entendu, elles sont bijectives et forment un groupe. De même, il y a des similitudes affines directes et indirectes.

Proposition III.3.5. *Une similitude de $\mathcal{E}$ qui n'est pas une isométrie a un unique point invariant, appelé centre de la similitude.*

[4] En utilisant l'exercice II.5, on voit facilement qu'il n'est pas nécessaire de demander que les applications considérées soient affines.

Démonstration. Soient φ une similitude (qui n'est pas une isométrie) et $\overrightarrow{\varphi}$ l'endomorphisme associé. Comme la similitude vectorielle $\overrightarrow{\varphi}$ n'est pas une isométrie, son rapport k n'est pas égal à 1 et elle n'a pas la valeur propre 1. On applique la proposition I.3.20 pour conclure que φ a bien un unique point fixe. □

En vectorialisant le plan affine au centre O de la similitude, on voit qu'une similitude directe qui n'est pas une isométrie est composée d'une homothétie de centre O et de rapport k et d'une rotation de centre O.

Si l'angle de la rotation est θ, on note la similitude $\sigma_{O,k,\theta}$. On a évidemment, si $kk' \neq 1$,

$$\sigma_{O,k,\theta} \circ \sigma_{O',k',\theta'} = \sigma_{O'',kk',\theta+\theta'}$$

pour un certain point O'', le centre de la similitude composée. La similitude réciproque d'une similitude s'exprime par la relation

$$(\sigma_{O,k,\theta})^{-1} = \sigma_{O,k^{-1},-\theta}.$$

Comme pour les rotations, le nombre θ est appelé *angle* de la similitude.

Le groupe des similitudes directes est donc constitué des similitudes $\sigma_{O,k,\theta}$ (en y incluant les rotations $\rho_{O,\theta} = \sigma_{O,1,\theta}$ et les homothéties $h(O,k) = \sigma_{O,k,0}$) et des translations.

Propriétés des similitudes directes

Voici une liste de propriétés des similitudes directes.

(1) Les similitudes directes conservent les angles orientés (puisque c'est le cas pour les homothéties et les déplacements).

(2) Elles envoient une droite $\mathcal{D}$ sur une droite $\mathcal{D}'$ telle que l'angle $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ soit l'angle de la similitude (modulo π).

(3) Une similitude directe de rapport k envoie un cercle de rayon R sur un cercle de rayon kR dont le centre est l'image du centre.

Construction du centre d'une similitude

Étant donnés deux couples de points (A, B) et (A', B') (avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$), il existe une unique similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B'. En effet, la similitude vectorielle est bien déterminée, son rapport est $A'B'/AB$ et son angle l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. Si on ajoute le fait que A' est l'image de A, on détermine bien une unique similitude directe (affine). Pour faire un peu de géométrie, indiquons maintenant une construction du centre de la similitude directe définie par les deux points distincts A et B et leurs images A' et B'.

Remarquons d'abord que, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, la similitude en question est une translation. On suppose donc que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Remarquons aussi que si les droites AB et $A'B'$ sont parallèles, la similitude est une homothétie et son centre est le point d'intersection $AA' \cap BB'$.

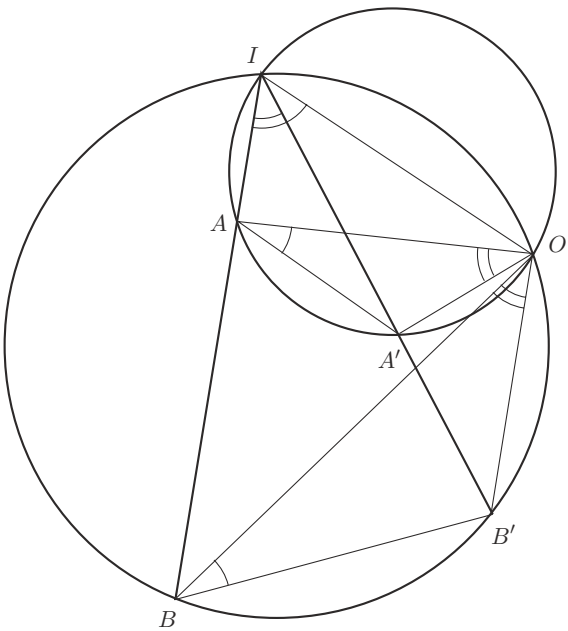


Figure 13

Nous pouvons donc supposer que les droites AB et $A'B'$ se coupent en un point I. Le centre O de notre similitude doit satisfaire

$$(OA, OA') \equiv \alpha \mod \pi \quad (\alpha \text{ est une mesure de l'angle de la similitude}).$$

Mais le point I vérifie

$$(IA, IA') = (AB, A'B') \equiv \alpha \mod \pi.$$

Donc, O est cocyclique avec I, A et A' (sur un cercle $\mathcal{C}$) et il en est de même avec I, B et B' (sur un cercle $\mathcal{C}'$). Ces deux cercles se coupent en I et en un autre point O (figure 13) qui peut coïncider avec I. Les triangles OAA' et OBB' sont semblables (les égalités d'angles indiquées sur la figure 13 se déduisent de la cocyclicité). Donc les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables eux aussi (voir par exemple la proposition III.3.7 ci-dessous). $\square$

Remarques III.3.6

– Les lecteurs attentifs auront remarqué que j'ai supposé que $I \neq A$, A', B et B'. Les cas restants sont naturellement laissés en exercice.

– On peut montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents si et seulement si les droites AA' et BB' sont parallèles (exercice).

Utilisation des nombres complexes

Comme plus haut, on identifie le plan affine à $\mathbf{C}$ à l'aide d'un repère orthonormé. Les similitudes directes sont les applications de la forme

$$z \longmapsto az + b.$$

Le rapport de cette similitude est $|a|$, son angle est un argument de a.

Cette écriture peut être extrêmement pratique. Donnons par exemple une démonstration très courte de l'utile résultat suivant :

Proposition III.3.7. *Il existe une similitude directe s de centre A envoyant B sur B' et C sur C' si et seulement si il existe une similitude directe s' de centre A envoyant B sur C et B' sur C'.*

Démonstration. On fixe l'origine au point A. Avec des notations évidentes pour les affixes des points, l'énoncé de la proposition est tout simplement l'équivalence :

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Longleftrightarrow \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}. \qquad \square$$

Remarque III.3.8. On peut bien sûr démontrer ce résultat directement, en remarquant que, si τ est la similitude de centre A qui envoie B' sur C, on a

$$s' = \tau \circ s = s \circ \tau$$

(les similitudes de même centre commutent).

Caractérisation des similitudes

Ce sont les seules applications affines qui conservent les angles, comme le montre la proposition suivante.

Proposition III.3.9. *Soit P un plan vectoriel euclidien et soit $f : P \to P$ une application linéaire qui conserve les angles (resp. qui les renverse). Alors f est une similitude directe (resp. indirecte).*

Démonstration. Fixons un vecteur $u \neq 0$. On compose f avec une similitude directe et on peut supposer que $f(u) = u$. Comme f conserve les angles, on a $(u, v) = (u, f(v))$ pour tout v et donc $f(v) = \lambda v$ (pour un $\lambda > 0$ dépendant a

priori de v). Comme d'habitude (voir le « truc » de l'exercice I.16), on conclut que f est une homothétie.

Si f renverse les angles, on la compose avec une réflexion et on applique ce qui précède. □

Remarque III.3.10. On peut démontrer un résultat beaucoup plus général : toute bijection de P dans lui-même de classe $\mathcal{C}^1$ qui conserve les angles est une similitude (c'est un théorème de Liouville sur les fonctions holomorphes, voir l'exercice III.71).

III.4. Inversions et faisceaux de cercles

On va maintenant étudier des transformations qui ne sont *pas* des isométries (et même pas des applications affines), les inversions. Elles ont la propriété de transformer certains cercles en droites et de préserver les angles, ce qui peut être très utile pour transformer une figure compliquée en une figure plus simple[(5)].

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}$ mais les définitions gardent un sens dans n'importe quel espace affine euclidien, les propriétés démontrées aussi, avec les mêmes démonstrations, à condition de remplacer partout « cercle » par « sphère » et « droite » par « hyperplan ».

Toutes les mesures algébriques dont il sera question ici seront prises par rapport à des vecteurs *unitaires* des droites concernées.

Définition III.4.1. Soient O un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle *inversion* de *pôle* O et de *puissance* k la transformation

$$I_{O,k} : \mathcal{E} - \{O\} \longrightarrow \mathcal{E} - \{O\}$$

qui, à tout point M, associe le point M' de la droite OM vérifiant l'égalité $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

Remarque III.4.2. Dans cette définition, M' est décrit à l'aide d'une mesure algébrique. Bien entendu le résultat ne dépend pas du choix du vecteur *unitaire* utilisé pour écrire les mesures algébriques. On peut exprimer la même chose en d'autres termes :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}.$$

(5) C'est une bonne occasion de conseiller la lecture du chapitre 5 de [**15**].

Il est clair que l'inversion $I_{O,k}$ est involutive, qu'elle n'a de points fixes que si $k > 0$, auquel cas ses points fixes sont les points du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$. Ce cercle est appelé le *cercle d'inversion*[6]. On remarquera, et c'est important, que l'inversion échange intérieur et extérieur du cercle en question. On remarquera aussi que tout cercle est le cercle d'inversion d'une unique inversion.

Effet sur les longueurs et les angles

Les inversions ne sont pas des isométries. Voici comment elles transforment les distances et les angles.

***Proposition III.4.3* (Distance des images).** *Si A' et B' sont les images de A et B par une inversion de pôle O et de puissance k, leur distance s'exprime par la formule*

$$A'B' = \frac{|k|\, AB}{OA \cdot OB}.$$

Démonstration. En effet, on a par définition de A' et B'

$$\overrightarrow{A'B'} = k\left[\frac{\overrightarrow{OB}}{OB^2} - \frac{\overrightarrow{OA}}{OA^2}\right],$$

ce qui permet de calculer

$$\|\overrightarrow{A'B'}\|^2 = k^2\left[\frac{OB^2}{OB^4} + \frac{OA^2}{OA^4} - 2\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA^2OB^2}\right] = \frac{k^2}{OA^2OB^2}\|\overrightarrow{AB}\|^2. \qquad \square$$

Proposition III.4.4. *Une inversion de pôle O est un difféomorphisme*[7] *de $\mathcal{E} - \{O\}$ dans lui-même. La différentielle de $I = I_{O,k}$ au point M est l'application linéaire $dI_M : E \to E$ définie par*

$$dI_M(u) = \frac{k}{OM^2}\left[u - 2\frac{\overrightarrow{OM}\cdot u}{OM^2}\overrightarrow{OM}\right].$$

[6] On peut considérer que les inversions de puissance négative ont un cercle d'inversion de rayon imaginaire. Ce point de vue sera utilisé au § VII.6.

[7] Rappelons qu'un *difféomorphisme* est une application bijective et différentiable dont l'application réciproque est différentiable.

Démonstration. C'est un simple calcul. Pour alléger l'écriture, je vais utiliser ici la notation « $M + u$ » définie dans la remarque I.2.3.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI(M+u)} &= \frac{k}{\left\|\overrightarrow{OM}+u\right\|^2}\left(\overrightarrow{OM}+u\right) \\
&= \frac{k}{OM^2}\left(1+2\frac{\overrightarrow{OM}\cdot u}{OM^2}+\frac{\|u\|^2}{OM^2}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{OM}+u\right) \\
&= \frac{k}{OM^2}\left(1-2\frac{\overrightarrow{OM}\cdot u}{OM^2}+\mathrm{o}(\|u\|)\right)\left(\overrightarrow{OM}+u\right) \\
&= \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}+\frac{k}{OM^2}\left[u-2\frac{\overrightarrow{OM}\cdot u}{OM^2}\overrightarrow{OM}\right]+\mathrm{o}(\|u\|) \\
&= \overrightarrow{OI(M)}+dI_M(u)+\mathrm{o}(\|u\|),
\end{aligned}$$

où $dI_M(u)$ est donnée par la formule annoncée. Comme I est une involution, ça suffit pour qu'elle soit un difféomorphisme. □

La différentielle dI_M est donc composée de la réflexion par rapport à la droite vectorielle orthogonale à OM (voir au besoin l'exercice II.7) et de l'homothétie de rapport k/OM^2. En particulier, l'application linéaire dI_M transforme un angle orienté en son opposé.

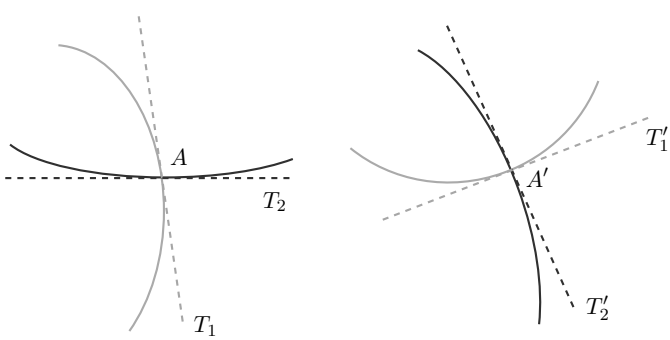


Figure 14

Imaginons maintenant deux courbes planes se coupant en un point A. L'*angle* de ces deux courbes est l'angle de leurs tangentes en A (figure 14). Considérons les images de ces courbes par une inversion dont le pôle n'est pas en A. Ce sont deux nouvelles courbes, qui se coupent en l'image A' de A. Les tangentes en A' à ces deux courbes sont les images des tangentes en A aux courbes originelles par la

différentielle de l'inversion utilisée (voir au besoin le chapitre VIII pour les notions utilisées ici). En particulier, l'angle des courbes images est l'opposé de l'angle des courbes de départ, ce qu'on peut exprimer ainsi :

***Corollaire III.4.5* (« L'inversion conserve les angles »).** *Une inversion transforme un angle orienté en son opposé.* □

Remarque III.4.6. J'insiste, il y a conservation des angles, mais pas conservation des droites : on va voir que les droites sont, en général, envoyées sur des cercles.

On utilise souvent le cas particulier des angles droits — une inversion conserve l'orthogonalité — et celui des angles nuls ou plats — une inversion transforme deux courbes tangentes en deux courbes tangentes.

Inversions et homothéties

Proposition III.4.7. *La composée $I_{O,k} \circ I_{O,k'}$ de deux inversions de même pôle est la restriction à $\mathcal{E} - \{O\}$ de l'homothétie de centre O et de rapport k/k'. La composée $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k}$ est l'inversion de pôle O et de puissance λk.*

Démonstration. Pour montrer la première assertion, considérons un point M, son image $M' = I_{O,k'}(M)$ par la première inversion et l'image $M'' = I_{O,k}(M')$ de ce dernier par la seconde. On a alors

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k'}{OM^2}\overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OM''} = \frac{k}{OM'^2}\overrightarrow{OM'}$$

de sorte que

$$OM'^2 = \frac{k'^2}{OM^2} \text{ et donc que } \overrightarrow{OM''} = \frac{k}{k'}\overrightarrow{OM}.$$

Ainsi $h_{O,\lambda} = I_{O,\lambda k} \circ I_{O,k}$. Il suffit de composer à droite des deux côtés avec $I_{O,k}$ pour obtenir la deuxième assertion. □

On utilise cette proposition pour changer la puissance d'une inversion en la remplaçant par une autre, mieux adaptée au problème à étudier.

Images des droites et des cercles, première partie

Par exemple, il est facile de remplacer une inversion de puissance négative par la composée d'une inversion de puissance positive et d'une symétrie par rapport au pôle : $I_{O,k} = h_{O,-1} \circ I_{O,-k}$. On va utiliser cette remarque pour étudier l'image d'une droite ou d'un cercle par une inversion.

Il est bien clair que les droites passant par le pôle sont globalement invariantes. Considérons donc les droites ne passant pas par le pôle.

Proposition III.4.8. *L'image par une inversion d'une droite ne passant pas par le pôle est un cercle passant par le pôle.*

Remarque III.4.9. C'est un abus de langage : les lectrices devraient lire cet énoncé et sa démonstration d'un œil assez critique pour comprendre que, bien entendu, le pôle n'est pas atteint. L'image de la droite est, en fait, le cercle privé du pôle.

Démonstration de la proposition III.4.8. Soit donc $I_{O,k}$ l'inversion de pôle O et de puissance k et $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par O.

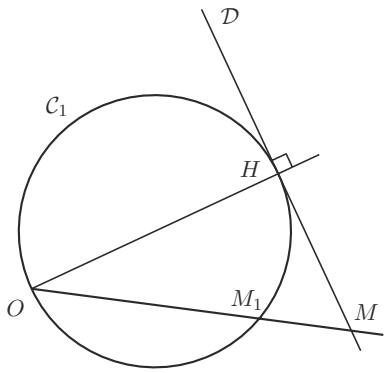


Figure 15

On commence par se ramener au cas d'une inversion de pôle O ayant un point fixe sur $\mathcal{D}$. Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$, de sorte que H est fixé par I_{O,OH^2} (voir la figure 15). Si $h_{O,\lambda}$ est une homothétie de centre O, nous savons (proposition III.4.7) que $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k} = I_{O,k\lambda}$. On choisit $\lambda = k/OH^2$, ainsi notre inversion est composée $I_{O,k} = h_{O,\lambda} \circ I_{O,OH^2}$, et on considère l'image $I_{O,OH^2}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par l'inversion de puissance OH^2.

Un point M du plan est sur $\mathcal{D}$ si et seulement s'il vérifie $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OH} = OH^2$. Si M_1 est l'image de M, on a l'égalité

$$\overrightarrow{OM} = \frac{OH^2}{OM_1^2}\overrightarrow{OM_1}.$$

Donc M est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\frac{OH^2}{OM_1^2}\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OH} = OH^2 \text{ soit si et seulement si } \overrightarrow{OM_1} \cdot \left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OM_1}\right) = 0,$$

autrement dit si et seulement si $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{M_1H} = 0$. Mais cette dernière relation exprime le fait que M_1 est sur le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre OH. Celui-ci contient donc l'image de la droite $\mathcal{D}$ par l'inversion I_{O,OH^2}. Réciproquement, ce même calcul

montre que l'image par l'inversion de tout point M_1 de $\mathcal{C}_1$ (autre que O) est un point de $\mathcal{D}$; comme l'inversion est involutive, tous les points de $\mathcal{C}_1$ (autre que O) sont donc les images de points de $\mathcal{D}$.

On a enfin

$$I_{O,k}(\mathcal{D}) = h_{O,\lambda} \circ I_{O,OH^2}(\mathcal{D}) = h_{O,\lambda}(\mathcal{C}_1).$$

Comme l'image par une homothétie de centre O d'un cercle passant par O est un cercle passant par O, on a bien montré que l'image de $\mathcal{D}$ est un cercle passant par O. □

Rappels : puissance, orthogonalité

Avant d'aller plus loin, il n'est sans doute pas inutile de faire quelques rappels[8] sur les cercles.

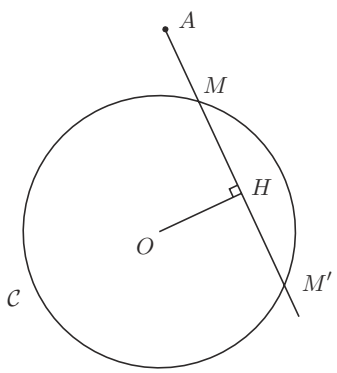


Figure 16

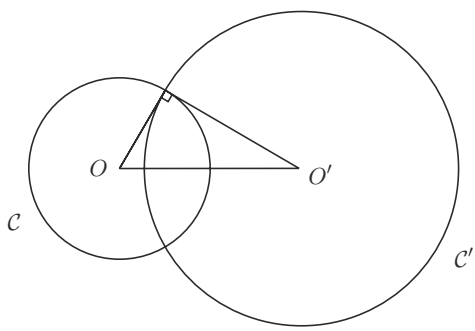


Figure 17

Donnons-nous un cercle $\mathcal{C}$ et un point A du plan. Considérons une droite arbitraire passant par A et coupant $\mathcal{C}$ en deux points M et M' (figure 16). Si H est le projeté orthogonal du centre O de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$, on calcule

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} &= \left(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{MH}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{MH}\right) \\
&= AH^2 - MH^2 \\
&= AO^2 - OH^2 - MH^2 \\
&= AO^2 - R^2
\end{aligned}$$

où R est le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

[8] Le mot « rappel » est utilisé ici pour désigner des notions ou résultat dont l'auteur aurait aimé que les lecteurs les connussent avant d'ouvrir le livre... mais l'auteur est réaliste.

La quantité $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'}$ ne dépend donc pas de la sécante $\mathcal{D}$ choisie, on l'appelle la *puissance de A par rapport à $\mathcal{C}$* et on la note $P_{\mathcal{C}}(A)$.

Remarque III.4.10. Le point A est sur $\mathcal{C}$ si et seulement si sa puissance par rapport à $\mathcal{C}$ est nulle ($P_{\mathcal{C}}(A) = 0$), il est à l'extérieur si et seulement si elle est strictement positive ($P_{\mathcal{C}}(A) > 0$).

Si A est à l'extérieur de $\mathcal{C}$, la sécante utilisée peut aussi bien être une tangente (alors M et M' sont confondus) et la puissance de A par rapport à $\mathcal{C}$ est le carré de la distance de A au point de contact de la tangente.

Définition III.4.11. On dit que deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont *orthogonaux* quand leur angle est droit, c'est-à-dire quand ils sont sécants et que les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales (figure 17). On note cette relation $\mathcal{C} \perp \mathcal{C}'$.

En appelant O, O' et R, R' les centres et rayons de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, une simple application du théorème de Pythagore dit alors que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si on a

$$OO'^2 = R^2 + R'^2,$$

ce qui est équivalent aussi bien à $P_{\mathcal{C}'}(O) = R^2$ qu'à $P_{\mathcal{C}}(O') = R'^2$.

Revenons aux inversions.

Proposition III.4.12. *Soit I une inversion de cercle $\mathcal{C}$. Soient M et M' un point du plan et son image. Alors tous les cercles passant par M et M' sont orthogonaux au cercle $\mathcal{C}$.*

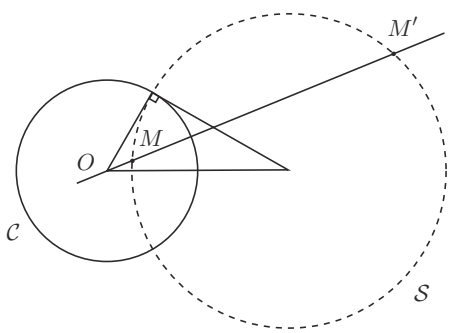


Figure 18

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ un cercle passant par M et M' (voir la figure 18). Alors la puissance du pôle O de l'inversion par rapport à $\mathcal{S}$ vaut

$$P_{\mathcal{S}}(O) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k,$$

où k est le carré du rayon de $\mathcal{C}$ dont O est le centre. Donc les cercles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont orthogonaux. □

Remarque III.4.13. On peut dire qu'une droite est *orthogonale à un cercle* quand elle est un diamètre de ce cercle (alors elle est effectivement orthogonale aux tangentes au cercle aux points de concours). L'énoncé de la proposition reste vrai si on y remplace (simultanément) « inversion » par « réflexion » et « cercle » $\mathcal{C}$ par « droite » $\mathcal{C}$.

Images des droites et des cercles, suite

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour poursuivre l'étude des images de cercles et droites par les inversions.

Proposition III.4.14. *L'image par une inversion d'un cercle ne passant pas par le pôle est un cercle ne passant pas par le pôle.*

Démonstration. Soit $I_{O,k}$ une inversion de pôle O et de puissance k et soit $\mathcal{C}$ un cercle ne passant pas par O. Appelons $p = P_{\mathcal{C}}(O)$ la puissance du pôle par rapport au cercle considéré. On choisit λ de façon que

$$I_{O,k} = h_{O,\lambda} \circ I_{O,p}$$

(c'est-à-dire $\lambda = k/p$). Mais la puissance p a été choisie pour que l'inversion de pôle O et de puissance p laisse globalement invariant le cercle $\mathcal{C}$, en échangeant entre eux les points d'intersection des droites passant par O avec $\mathcal{C}$.

Enfin, $I_{O,k}(\mathcal{C}) = h_{O,\lambda}(\mathcal{C})$ est bien un cercle ne passant pas par O. □

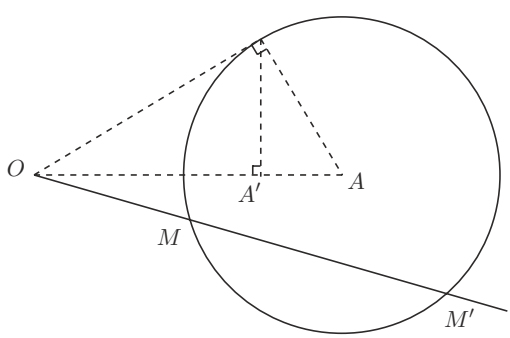


Figure 19

Remarque III.4.15. Comme le montre l'argument utilisé, les centres du cercle et de son image sont alignés avec le pôle.

Remarque III.4.16. Attention, l'image du centre du cercle n'est *jamais* le centre du cercle image. Considérons par exemple la figure 19, qui représente un cercle $\mathcal{C}$ globalement invariant par une inversion de pôle O. L'image de son centre A est le point A' (voir l'exercice III.55).

Récapitulons les renseignements contenus dans les propositions précédentes.

Théorème III.4.17. *Soit I une inversion de pôle O. L'image par I*

- *d'une droite passant par O est cette droite elle-même,*
- *d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O,*
- *d'un cercle passant par O est une droite ne passant pas par O,*
- *d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.*

On a déjà tout démontré (la troisième assertion est une conséquence de la deuxième et de l'involutivité de I). □

Remarque III.4.18. Il serait plus simple de se souvenir que « l'image d'un cercle est un cercle », ce qui est vrai... avec une petite convention, qu'il n'est pas bien difficile de justifier. On convient qu'il y a quelque part, très loin, un[(9)] *point à l'infini*, noté ∞, et que les droites sont les cercles passant par ce point.

La relation $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ envoie M' très loin quand M est très proche de O, il est donc naturel de convenir que ∞ est l'image du pôle d'une inversion, et, naturellement, que le pôle est l'image de ∞. On prolonge ainsi $I_{O,k}$ en une application

$$\mathcal{E} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathcal{E} \cup \{\infty\}\,.$$

On peut alors relire respectivement les assertions du théorème précédent ainsi : soit I une inversion de pôle O ; l'image par I

– d'un cercle passant par ∞ et par O est un cercle passant par O (image de ∞) et ∞ (image de O),

– d'un cercle passant par ∞ et ne passant pas par O est un cercle passant par O et ne passant pas par ∞,

– d'un cercle passant par O et ne passant pas par ∞ est un cercle passant par ∞ et ne passant pas par O,

– d'un cercle ne passant ni par ∞ ni par O est un cercle ne passant ni par O ni par ∞.

Autrement dit, puisqu'on sait que O et ∞ sont images l'un de l'autre : l'image d'un cercle est un cercle.

(9) Un seul point à l'infini, on y reviendra longuement aux §§ VI.7 et VII.6.

Remarque III.4.19. Il est bien entendu possible de formaliser la présence du point ∞ et de justifier son nom (voir les exercices V.34 et V.52 et les §§ VI.7 et VII.6).

Axe radical de deux cercles

Donnons-nous deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques. Alors l'ensemble des points du plan qui ont la même puissance par rapport aux deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une droite, l'*axe radical* de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, perpendiculaire à la droite des centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. En effet, comme $P_{\mathcal{C}}(M) = MO^2 - R^2$ (les lecteurs ont déjà deviné qui sont O et R et qui vont être O' et R'), M a même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ si et seulement si il vérifie $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$, c'est-à-dire si et seulement si on a $\overrightarrow{O'O} \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}\right) = R^2 - R'^2$, ce qui, comme le vecteur $\overrightarrow{O'O}$ n'est pas nul, est bien l'équation d'une droite perpendiculaire à la droite des centres (voir aussi l'exercice II.9). Une autre démonstration, par un calcul en coordonnées, est donnée plus bas. □

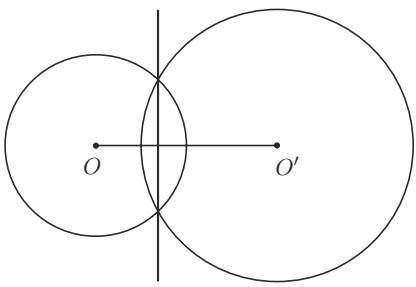


Figure 20

Remarque III.4.20. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants, les deux points d'intersection ont évidemment la même puissance par rapport aux deux cercles. L'axe radical est alors la droite passant par ces deux points (figure 20). Une construction plus générale est indiquée dans l'exercice III.46.

Faisceaux de cercles

Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques et leur axe radical Δ, on peut considérer l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les cercles C tels que Δ soit l'axe radical de C et $\mathcal{C}$... ou, ce qui est équivalent, de C et $\mathcal{C}'$.

Une telle famille $\mathcal{F}$ de cercles est un *faisceau de cercles*, le faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Le faisceau $\mathcal{F}$ contient les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ qui l'engendrent, mais il est aussi engendré par n'importe quel couple de cercles qu'il contient (de même qu'une droite peut-être définie par deux quelconques de ses points).

Traditionnellement en mathématiques, le mot « faisceau », ou « pinceau », désigne une famille *linéaire*. Ici, il s'agit de « la droite engendrée par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans l'espace des cercles », ce que je vais expliquer maintenant[10].

Choisissons un repère affine orthonormé de telle façon que la droite des centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soit l'axe des abscisses. Les coordonnées de O et O' sont notées $(a, 0)$ et $(a', 0)$. Les équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont respectivement :

$$(x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad \text{et} \quad (x-a')^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

Si λ et λ' sont deux nombres réels non tous deux nuls, on considère la courbe $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ d'équation

$$\lambda\left((x-a)^2 + y^2 - R^2\right) + \lambda'\left((x-a')^2 + y^2 - R'^2\right) = 0.$$

Si $\lambda + \lambda'$ n'est pas nul, $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2bx + c = 0,$$

c'est donc un cercle (éventuellement vide ou réduit à un point).

Si $\lambda + \lambda' = 0$, $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ a une équation de la forme $(a - a')x = b$, c'est donc une droite ($a - a' \neq 0$ puisque les deux cercles ne sont pas concentriques) orthogonale à la droite des centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Cette équation est aussi de la forme

$$P_{\mathcal{C}}(M) - P_{\mathcal{C}'}(M) = 0$$

puisqu'on a remarqué plus haut que $OM^2 - R^2$ (ici $(x-a)^2 + y^2 - R^2$) était la puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$. En d'autres termes, la droite $\mathcal{C}_{\lambda,-\lambda}$ est l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Mais c'est aussi l'axe radical de $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ et de $\mathcal{C}$ pour tous λ et λ'. En effet, en écrivant encore $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ pour les équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, une équation de l'axe radical de $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ et de $\mathcal{C}$ est, d'après ce qu'on vient de voir,

$$\frac{\lambda\mathcal{C} + \lambda'\mathcal{C}'}{\lambda + \lambda'} - \mathcal{C} = 0,$$

soit $\lambda'\mathcal{C}' - \lambda'\mathcal{C} = 0$, qui est bien l'équation de l'axe radical Δ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Les équations $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ décrivent donc bien des cercles du faisceau engendré par les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Inversement, dire que Γ est un cercle du faisceau $\mathcal{F}$, c'est dire que l'axe radical de Γ et $\mathcal{C}$ est la droite Δ, en d'autres termes que l'on a l'équivalence

$$P_{\Gamma}(M) = P_{\mathcal{C}}(M) \iff P_{\mathcal{C}}(M) - P_{\mathcal{C}'}(M) = 0$$

[10] Ici et maintenant, mais aussi au § VII.6, avec les équations des cercles dans le plan.

puisque cette dernière équation est celle de Δ. Comme toutes ces équations sont de degré 1 ou 2, c'est encore équivalent à ce que les deux équations soient proportionnelles et en fin de compte à ce qu'il existe un scalaire λ tel que, pour tout point M, on ait :

$$P_\Gamma(M) = P_{\mathcal{C}}(M) + \lambda(P_{\mathcal{C}}(M) - P_{\mathcal{C}'}(M)).$$

Bref, Γ a une équation de la forme requise pour être un cercle du faisceau.

Types de faisceaux

Il y a différents types de faisceaux, suivant les positions relatives des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

– Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en deux points (distincts) A et B, l'axe radical est la droite AB, il contient deux points A et B dont la puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est nulle. Leur puissance par rapport à tous les cercles du faisceau est donc nulle, en d'autres termes, tous les cercles du faisceau passent par A et B... et tous les cercles passant par A et B sont dans le faisceau : le faisceau est le *faisceau à points bases* de tous les cercles sécants en A et B (figure 21). Du point de vue des

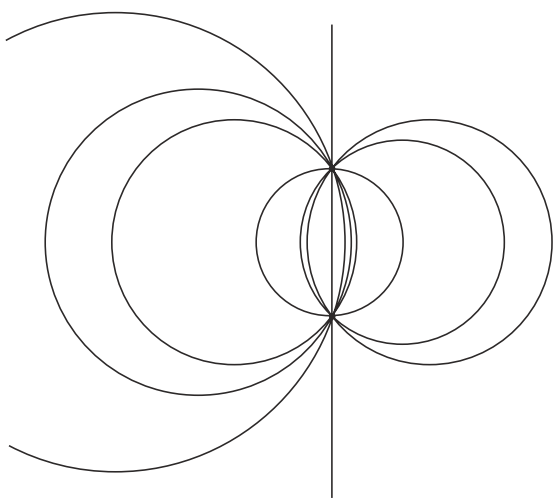


Figure 21. Faisceau à points bases

équations ci-dessus, dans ce cas, tous les $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ avec $\lambda + \lambda' \neq 0$ sont des cercles (à rayon réel positif !).

– Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ne se coupent pas, leur axe radical ne peut les rencontrer (il n'y a aucun point qui ait puissance nulle par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$), il est donc constitué de points ayant tous une puissance positive par rapport à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, et tous les cercles

du faisceau (tous les points de l'axe radical sont à l'extérieur des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$). Il ne rencontre aucun des cercles du faisceau.

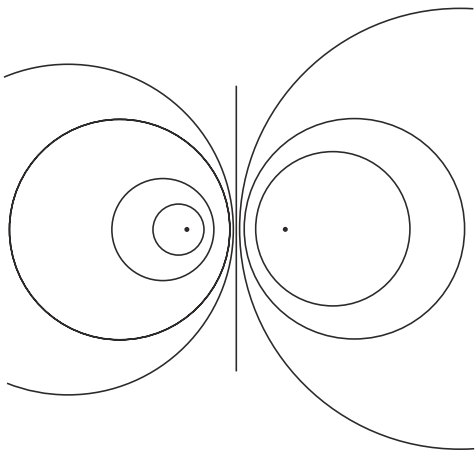


Figure 22. Faisceau à points limites

Dans ce cas, il y a deux cercles de rayon nul (et beaucoup de cercles de rayon imaginaire !) dans le faisceau. L'axe radical est la médiatrice du segment formé par les deux cercles-points. Le faisceau est dit *à points limites* (figure 22). Ces deux cercles-points sont des cercles à part entière du faisceau et en particulier ils le déterminent.

– Le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents est un cas limite des deux cas précédents. On vérifie sans mal que tous les cercles du faisceau sont tangents entre eux, avec une tangente commune qui est l'axe radical.

À un faisceau $\mathcal{F}$ défini par deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on associe la famille $\mathcal{F}^\perp$ des cercles orthogonaux à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (voir la figure 23).

Proposition III.4.21. *La famille $\mathcal{F}^\perp$ est un faisceau de cercles, dont l'axe radical est la droite des centres de $\mathcal{F}$ et qui ne dépend que de $\mathcal{F}$. Tous les cercles de $\mathcal{F}^\perp$ sont orthogonaux à tous les cercles de $\mathcal{F}$. De plus, on a $\left(\mathcal{F}^\perp\right)^\perp = \mathcal{F}$.*

Démonstration. Appelons O et O' respectivement les centres des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, R et R' leurs rayons. La droite OO' est un diamètre de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, elle est donc orthogonale à ces deux cercles. Fixons un cercle Γ orthogonal à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, considérons le faisceau $\mathcal{G}$ engendré par Γ et OO' et montrons que $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{G}$. Soit Γ' un cercle orthogonal à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$. On a $\mathcal{P}_\Gamma(O) = R^2 = \mathcal{P}_{\Gamma'}(O)$, puisque Γ et Γ' sont orthogonaux à $\mathcal{C}$ et de même, en utilisant $\mathcal{C}'$, $\mathcal{P}_\Gamma(O') = R'^2 = \mathcal{P}_{\Gamma'}(O')$, donc la

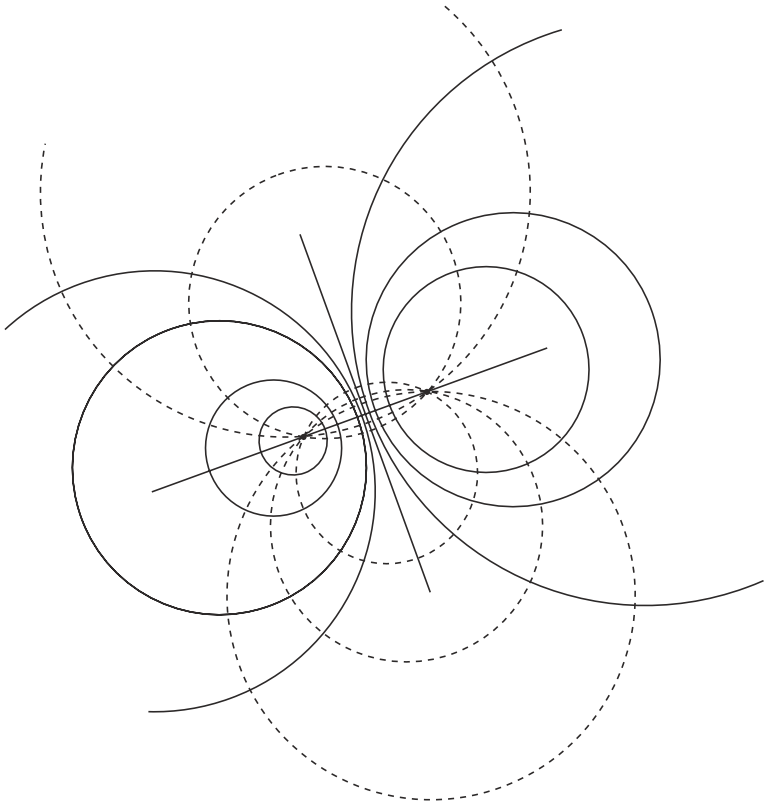


Figure 23. Faisceaux orthogonaux

droite OO' est l'axe radical de Γ et Γ' et Γ' est dans $\mathcal{G}$: on a montré l'inclusion $\mathcal{F}^\perp \subset \mathcal{G}$.

Inversement, si Γ' est un cercle du faisceau $\mathcal{G}$, O est sur l'axe radical de Γ et Γ', on a donc $\mathcal{P}_{\Gamma'}(O) = \mathcal{P}_\Gamma(O) = R^2$ (la deuxième égalité vient de l'orthogonalité de $\mathcal{C}$ et Γ), ainsi Γ' est orthogonal à $\mathcal{C}$. On montre de même que Γ' est orthogonal à $\mathcal{C}'$, donc que Γ est un cercle du faisceau $\mathcal{F}^\perp$. On a montré l'inclusion $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}^\perp$.

On conclut que $\mathcal{F}^\perp$, qui est égal à $\mathcal{G}$, est un faisceau de cercles. Les autres assertions s'en déduisent. $\square$

On dit que $\mathcal{F}^\perp$ est le *faisceau orthogonal* de $\mathcal{F}$. On trouvera une autre description de cette relation d'orthogonalité au § VII.6.

En remarquant que, pour tout point A de $\mathcal{C}$, le cercle-point A est orthogonal à $\mathcal{C}$ (la puissance de son centre par rapport à $\mathcal{C}$ est bien le carré de son rayon), on en déduit que

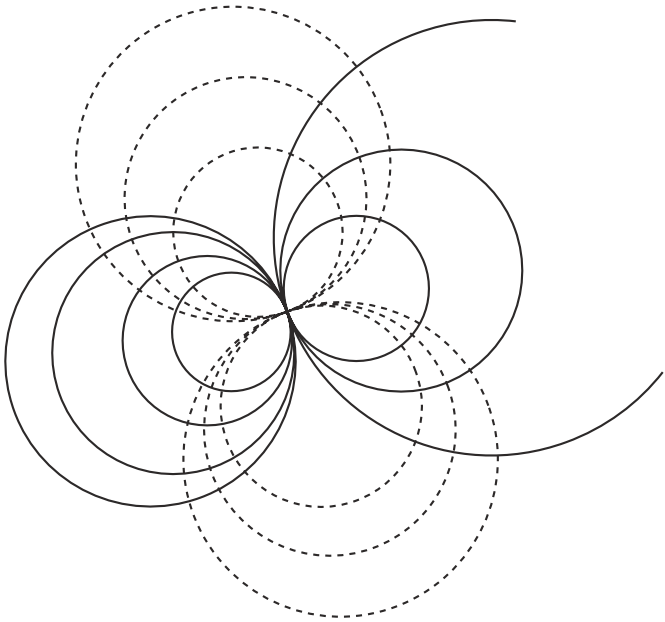


Figure 24. Faisceaux tangents orthogonaux

– l'orthogonal d'un faisceau à points bases A et B est le faisceau à points limites A et B (figure 23)

– et inversement, l'orthogonal d'un faisceau à points limites I et J est le faisceau à points bases I et J.

– De même, l'orthogonal d'un faisceau de cercles tangents est le faisceau des cercles tangents à la droite des centres du premier au même point (figure 24).

Inverse d'un faisceau

En général, grâce au théorème III.4.17, l'inverse d'un faisceau va être un faisceau de même nature. Voici quelques précisions et cas particuliers (on utilise le théorème III.4.17 et le fait que les inversions conservent l'orthogonalité, c'est-à-dire le corollaire III.4.5).

– Si le pôle est quelconque, il y a un des cercles du faisceau qui passe par ce point[11]. Il est transformé en une droite, l'axe radical du nouveau faisceau. L'axe radical, lui, est transformé en un cercle du nouveau faisceau.

[11] Voir au besoin l'exercice III.66.

– Si le pôle est sur l'axe radical et si la puissance de l'inversion est la puissance du pôle par rapport aux cercles du faisceau, alors le faisceau est invariant (au sens où chacun des cercles est globalement invariant).

– Si $\mathcal{F}$ est un faisceau à points bases A et B et si le pôle de l'inversion est en A, le faisceau $\mathcal{F}$ est transformé en la famille des droites passant par l'inverse B' de B... et le faisceau orthogonal $\mathcal{F}^{\perp}$ en la famille des cercles orthogonaux à ces droites, autrement dit en la famille de tous les cercles de centre B' (figure 25).

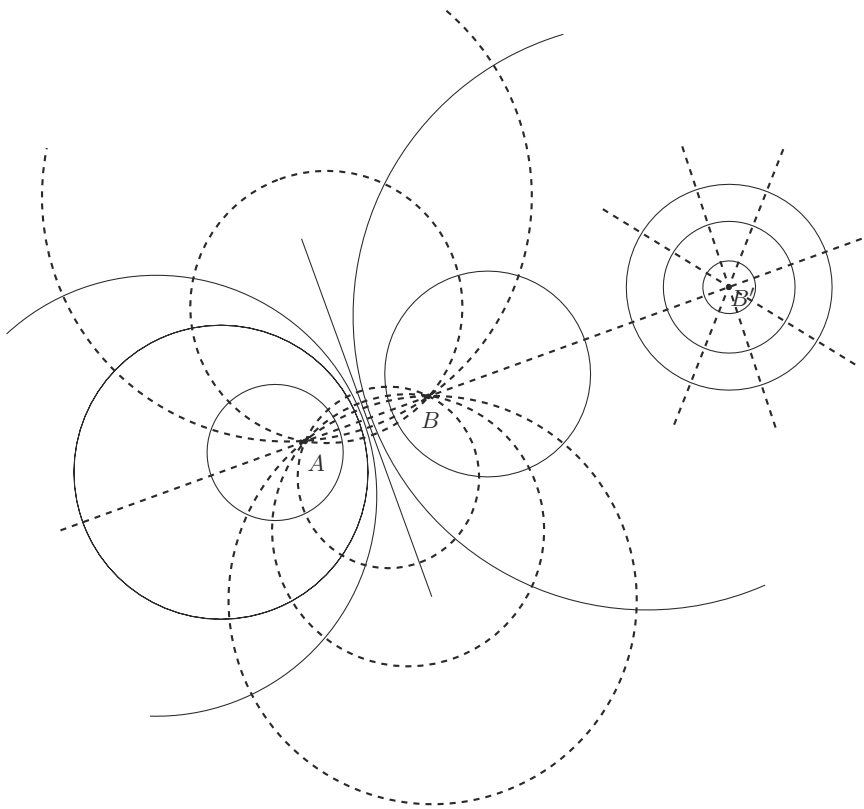


Figure 25. Faisceaux orthogonaux et leurs inverses

– Autrement dit, si $\mathcal{G}$ est un faisceau à points limites I et J, et si le pôle de l'inversion est en I, $\mathcal{G}$ est transformé en la famille des cercles centrés en l'image J' de J et $\mathcal{G}^{\perp}$ en la famille des droites passant par J'. On en retiendra qu'on peut toujours transformer par inversion un faisceau à points limites en un faisceau de cercles concentriques, ce qui permet de simplifier notablement certains problèmes (voir par exemple l'exercice III.67).

– Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de cercles tangents en A et si le pôle de l'inversion est en A, $\mathcal{F}$ est transformé en la famille des droites parallèles à son axe radical et $\mathcal{F}^{\perp}$ en la famille des droites orthogonales.

Exercices et problèmes

Dans ces exercices, on se place dans un plan affine euclidien, qu'on suppose avoir orienté avant de parler de mesure des angles.

Généralités

Exercice III.1. Dans le plan vectoriel euclidien orienté, montrer que la base (u, v) est directe si et seulement si l'angle (u, v) a une mesure dans $[0, \pi]$.

Dans le plan affine euclidien orienté, on donne trois points non alignés A, B et M. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ est directe,

(2) la base $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est directe,

(3) dans une base directe dont le premier vecteur est $\overrightarrow{AB}$, l'ordonnée de M est strictement positive.

Exercice III.2. Quelle est la composée des deux rotations $\rho_{B,-\theta} \circ \rho_{A,\theta}$?

Exercice III.3. Les isométries planes s'écrivent, en nombres complexes, comme indiqué dans le tableau suivant.

	translations	rotations	réflexions	symétries glissées
écriture en nombres complexes	$z \mapsto z + b$	$z \mapsto az + b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a \neq 1$	$z \mapsto a\overline{z} + b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\overline{b} + b = 0$	$z \mapsto a\overline{z} + b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\overline{b} + b \neq 0$

Exercice III.4. Au fait, comment s'écrit une transformation affine du plan en nombres complexes ?

Exercice III.5 **(Groupe d'isométries d'une figure, à suivre)**

On considère φ et ψ, deux déplacements du plan. Que peut-on dire de $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$?

Montrer que le groupe des déplacements qui préservent une partie bornée du plan est commutatif.

Montrer que tout sous-groupe fini du groupe des déplacements affines du plan est commutatif.

***Exercice III.6* (Groupe d'isométries d'une figure (suite)).** Si G est un sous-groupe fini du groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, montrer qu'il y a un point de $\mathcal{E}$ fixé par tous les éléments de G. Retrouver le dernier résultat de l'exercice III.5.

Exercice III.7. Deux points A et B du plan étant donnés ainsi qu'un nombre réel k, rappeler ce qu'est l'ensemble des points M tels que $MA/MB = k$ (exercice II.9), et déterminer l'ensemble des points M tels que $MA/MB > k$ puis tels que $MA/MB < k$.

Exercice III.8. Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, trouver toutes les similitudes envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

Exercice III.9. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites, F et F' deux points. On suppose que $F \notin \mathcal{D}$, $F' \notin \mathcal{D}'$. Montrer qu'il existe une similitude directe σ telle que $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ et $\sigma(F) = F'$.

***Exercice III.10* (Groupes d'isométries d'une figure, suite).** Trouver toutes les isométries du plan qui préservent

(1) un segment,

(2) un losange ou un rectangle non carrés (on expliquera pourquoi ces groupes sont isomorphes),

(3) un triangle équilatéral, un carré, plus généralement un polygone régulier à n côtés,

(4) un cercle, la réunion d'un cercle et d'une droite (au fait, quelles sont toutes les applications affines qui préservent un cercle ?),

(5) le réseau des entiers dans $\mathbf{C}$ (c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de la forme $m + in$ avec m et n dans $\mathbf{Z}$).

***Exercice III.11* (Groupes d'isométries d'une figure, suite).** Existe-t-il une figure plane dont le groupe des déplacements soit isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$? Même question avec les isométries.

Triangles, triangles...

Exercice III.12. Si a, b, c et R désignent les longueurs des trois côtés BC, CA, AB et le rayon du cercle circonscrit d'un triangle ABC et si A, B, C désignent aussi des mesures de ses angles géométriques, montrer que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Exercice III.13. Avec les mêmes notations que dans l'exercice III.12, montrer que

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(le cas où A est droit est le théorème de Pythagore).

Exercice III.14. Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC. Montrer que l'intersection de AO et de BC est le barycentre de $((B, \sin(2B)), (C, \sin(2C)))$. En déduire les coordonnées barycentriques du point O dans le triangle ABC.

***Exercice III.15* (Cercle inscrit, cercles exinscrits).** Démontrer que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point I équidistant des trois côtés du triangle et (donc) centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, le cercle inscrit.

Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle en A et les deux bissectrices extérieures des angles en B et C sont concourantes en un point J équidistant des trois côtés du triangle et (donc) centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, le cercle exinscrit dans l'angle A (figure 26)[12].

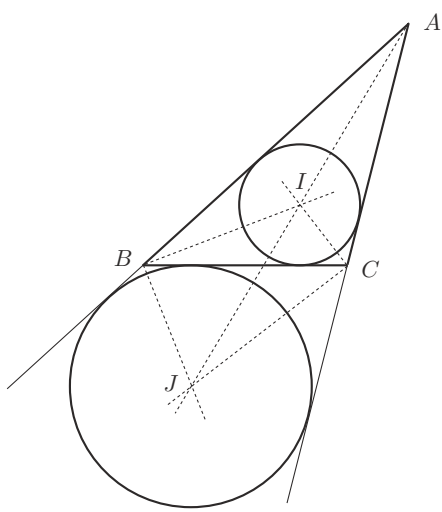


Figure 26. Cercles inscrit et exinscrit

[12] Les lectrices sont invitées à vérifier que leur démonstration ne permet *pas* de montrer que les trois bissectrices extérieures sont concourantes (c'est faux, et donc la démonstration le serait aussi).

Exercice III.16. Soit ABC un triangle et soient U, V et W les projections du centre I de son cercle inscrit sur ses trois côtés BC, CA et AB. Montrer que les droites AU, BV et CW sont concourantes (en un point appelé le *point de Gergonne* du triangle, voir la figure 27).

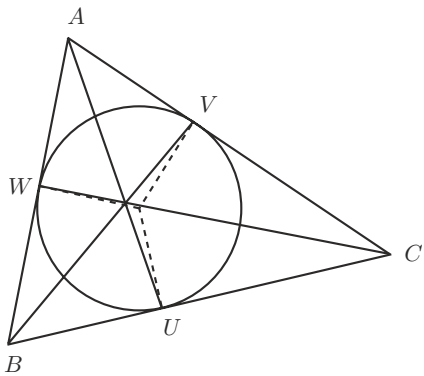


Figure 27. Point de Gergonne

***Exercice III.17* (Un billard rond).** On lance une boule d'un point d'un billard rond. Elle rebondit sur la circonférence selon la règle « l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion ». Montrer qu'il existe, à l'intérieur du billard, un cercle qui ne sera pas coupé par la trajectoire de la boule.

***Exercice III.18* (Triangles isocèles).** Si C est sur la médiatrice du segment AB, on a l'égalité d'angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Et réciproquement.

Exercice III.19. Soit ABC un triangle. La médiatrice de BC coupe le cercle circonscrit en deux points I et J. On appelle J celui des deux qui est du même côté de BC que A (figure 28). Montrer que AI et AJ sont les bissectrices (respectivement intérieure et extérieure) de l'angle en A du triangle.

Exercice III.20. Soient D, E et F les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport à ses trois côtés. Montrer que ces points sont sur le cercle circonscrit à ABC. On suppose que les angles du triangle ABC sont aigus[13]. Montrer que les hauteurs de ABC sont les bissectrices intérieures du triangle DEF.

On donne un triangle DEF. Construire un triangle ABC dont les hauteurs soient les bissectrices intérieures du triangle DEF.

[13] Un angle géométrique est *aigu* s'il a une mesure strictement inférieure à $\pi/2$.

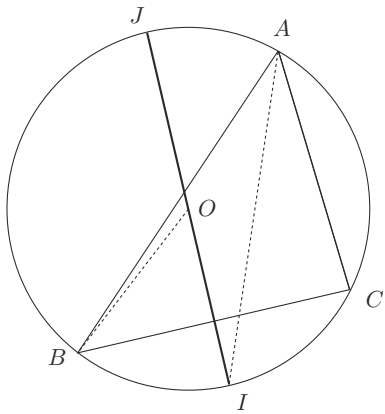


Figure 28

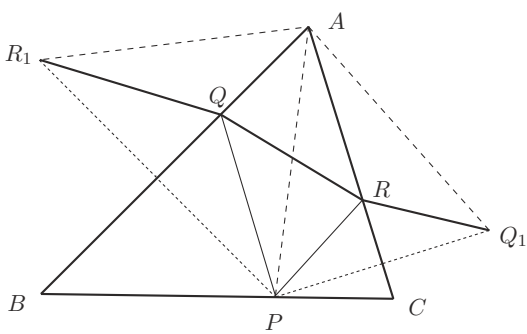


Figure 29. Problème de Fagnano

***Exercice III.21* (Problème de Fagnano).** Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. On cherche trois points P, Q et R sur ses trois côtés de façon que le périmètre de PQR soit minimal. Montrer qu'il existe une solution, puis construire les trois points qui réalisent cette solution. On pourra considérer d'abord un point P arbitraire du segment BC et ses symétriques Q_1 et R_1 par rapport aux deux autres côtés (figure 29) pour minimiser le périmètre de PQR, P étant fixé, puis faire varier P.

Montrer qu'alors les hauteurs de ABC sont les bissectrices intérieures de PQR.

***Exercice III.22* (Le théorème d'Erdős-Mordell).** Soit P un point à l'intérieur d'un triangle ABC. Appelons a, b, c les longueurs des trois côtés, r_a, r_b, r_c les distances de P aux côtés et R_a, R_b, R_c les longueurs PA, PB, PC (figure 30).

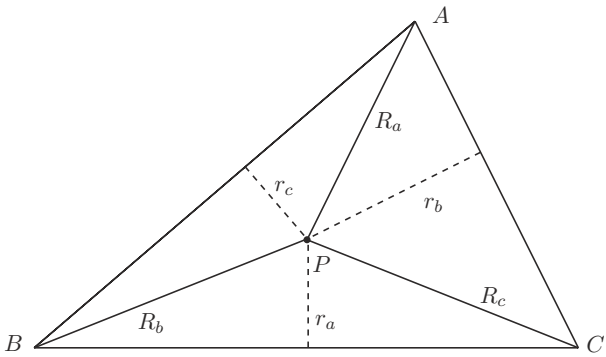


Figure 30. Théorème d'Erdős–Mordell

(1) Supposons que $P \in BC$. Montrer que l'aire de ABC est égale à $\frac{1}{2}(br_b + cr_c)$. En déduire que $aR_a \geq br_b + cr_c$.

(2) En utilisant une homothétie de centre A, montrer que cette inégalité est vraie pour tout P.

(3) En utilisant l'image de P par la réflexion par rapport à la bissectrice de l'angle en A, montrer que $aR_a \geq br_c + cr_b$.

(4) En déduire que

$$R_a + R_b + R_c \geq \frac{b^2+c^2}{bc} r_a + \frac{c^2+a^2}{ca} r_b + \frac{a^2+b^2}{ab} r_c$$

et enfin que

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a + r_b + r_c)$$

(c'est l'inégalité d'Erdős–Mordell[14]).

(5) Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si ABC est un triangle équilatéral de centre P.

Exercice III.23. Soit ABC un triangle. Une droite D passant par A coupe la droite BC en P. Montrer que D est une bissectrice de l'angle en A si et seulement si

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

***Exercice III.24* (Cas d'égalité des triangles).** Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Avec chacune des hypothèses suivantes, montrer que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques (c'est-à-dire qu'il existe une isométrie φ telle que $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ et $C' = \varphi(C)$).

[14] Cette démonstration courte est due à Vilmos Komornik [**28**].

(1) Premier cas d'égalité, « un angle égal entre deux côtés égaux », en clair :

$$AB = A'B', \quad AC = A'C' \quad \text{et} \quad A = A'$$

(A désignant ici la mesure de l'angle en A).

(2) Deuxième cas d'égalité, « un côté égal entre deux angles égaux », en clair :

$$AB = A'B', \quad A = A' \quad \text{et} \quad B = B'.$$

(3) Troisième cas d'égalité, « trois côtés égaux », en clair :

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \text{et} \quad CA = C'A'.$$

Exercice III.25. Soit ABC un triangle et soient I le centre de son cercle inscrit $\mathcal{C}$, K, K' et K'' les projections orthogonales de I sur les côtés BC, CA, AB. On appelle comme toujours a, b et c les longueurs des trois côtés BC, CA, AB et p le demi-périmètre. Montrer[15] que $CK = p - c$, $AK' = p - a$, $BK'' = p - b$.

Exercice III.26. Soit ABC un triangle. On appelle α, β et γ des mesures des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

(1) Quelle est la nature de la transformation $\varphi = \rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\beta} \circ \rho_{C,\gamma}$?

(2) On appelle J le point de contact du cercle inscrit dans le triangle avec la droite AC. Quelle est l'image de J par φ ? Déterminer complètement φ.

Cocyclicité

***Exercice III.27* (Arcs capables).** Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ et soit α un nombre réel. Trouver le lieu des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (resp. (MA, MB), resp. l'angle géométrique $\widehat{AMB}$) ait pour mesure α.

Exercice III.28. On donne deux cordes parallèles AB et CD d'un cercle de centre O. Montrer que les angles au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ sont égaux.

Soient $\mathcal{C}$ un cercle[16] et D_1, D_2, D_3 trois directions de droites. Soit M_0 un point de $\mathcal{C}$, M_1 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_1 passant par M_0 et de $\mathcal{C}$, M_2 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_2 passant par M_1 et de $\mathcal{C}$, *etc.* On définit ainsi des points M_i pour $i \geq 0$. Montrer que $M_6 = M_0$ (figure 31).

[15] Cet exercice n'est pas très palpitant, d'accord, mais le résultat est utile, il sera utilisé notamment dans l'exercice III.69.

[16] On peut remplacer le cercle par une conique quelconque dans cet exercice, c'est alors une variante du théorème de Pascal (ici le théorème VII.4.4, voir aussi l'exercice VII.54 et une autre variante du théorème de Pascal sur un cercle dans l'exercice III.48).

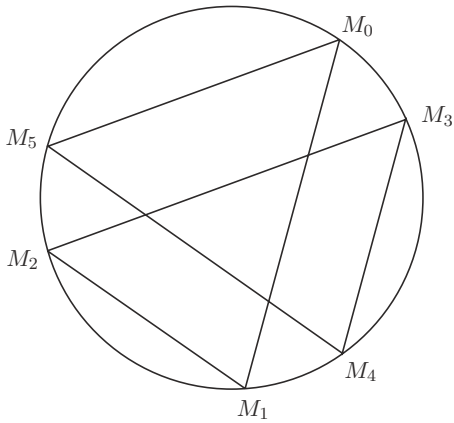


Figure 31

Exercice III.29. Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan affine euclidien. Par un point A extérieur à $\mathcal{C}$, on mène

– une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points B et C,
– une tangente à $\mathcal{C}$, tangente en un point T.

Soit M un point de la droite AT. La parallèle à TC passant par M coupe la droite AC en N. Montrer que les points M, N, B et T sont cocycliques.

Exercice III.30. On se place dans un plan affine euclidien. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. On appelle E le projeté orthogonal de A sur la diagonale BD, F celui de B sur la diagonale AC. On suppose que AC et BD ne sont pas orthogonales, de sorte que $E \neq F$.

(1) Que peut-on dire des angles de droites (BE, EF) et (AB, AC) ?

(2) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si les droites EF et CD sont parallèles.

***Exercice III.31* (Théorème de Miquel).** On se donne quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ tels que $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en A et A', $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en B et B', $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en C et C' et enfin $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ se coupent en D et D'. Montrer que A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si A', B', C' et D' le sont (figure 32[17]).

***Exercice III.32* (La droite de Simson).** Soit ABC un triangle. À tout point M du plan, on peut associer ses projetés orthogonaux P, Q et R sur BC, CA, AB.

[17] Si cette figure vous fait penser à un cube, n'hésitez pas à aller chercher pourquoi dans l'exercice VI.40.

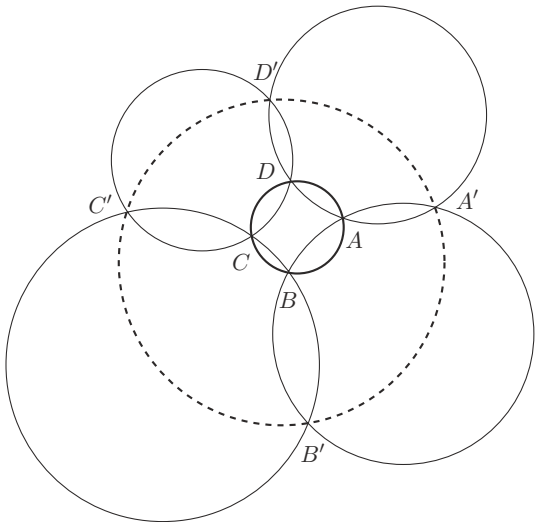


Figure 32. Théorème de Miquel

Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC. À tout point M du cercle circonscrit est ainsi associée une droite, sa *droite de Simson* (figure 33).

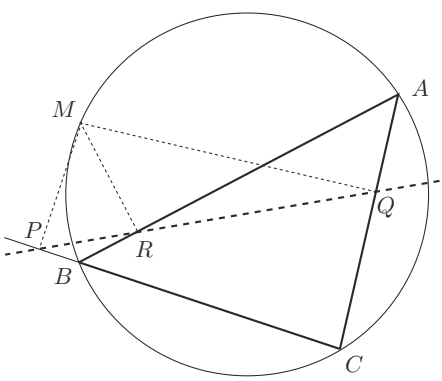


Figure 33. Droite de Simson

***Exercice III.33* (La droite de Steiner).** Démontrer que les symétriques P', Q' et R' d'un point M par rapport aux trois côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit. Montrer que, si c'est le cas, la droite $P'Q'R'$ (*droite de Steiner* de M) est parallèle à la droite de Simson de M et passe par l'orthocentre de ABC.

***Exercice III.34* (Le pivot).** Soit ABC un triangle et soient A', B' et C' trois points (distincts de A, B et C) situés sur ses côtés BC, CA et AB. Montrer que les cercles circonscrits à $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$ ont un point commun, le *pivot* (voir la figure 34).

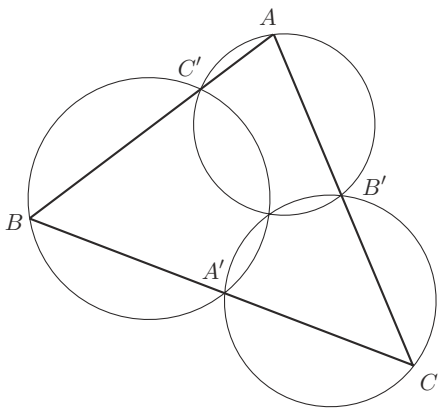


Figure 34. Pivot

Utilisation des rotations

Exercice III.35. On donne un point A et deux droites D_1 et D_2. Construire un triangle équilatéral ABC avec B sur D_1 et C sur D_2.

Exercice III.36. Soit ABC un triangle et soient β et γ les deux points tels que βAB et γAC soient rectangles isocèles extérieurs à ABC et d'hypoténuses AB, AC respectivement. Soit I le milieu de BC. Montrer que $\beta I \gamma$ est rectangle isocèle en I.

***Exercice III.37* (Un théorème attribué à Napoléon).** Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe, P, Q, R et S les quatre points tels que APB, BQC, CRD et DSA soient quatre triangles rectangles (en P *etc*) isocèles extérieurs au quadrilatère. Montrer que $PR = QS$ et que $PR \perp QS$. Montrer que $PQRS$ est un carré si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice III.38. Sur un cercle de centre O, on donne trois arcs interceptés par des angles au centre de mesure $\pi/3$, AB, CD, EF. On appelle M, N et P les milieux des cordes BC, DE et FA et B', E' les milieux de OB et OE. Montrer que $PB'E'$ est équilatéral ainsi que MNP.

***Exercice III.39* (Point de Fermat).** Sur les trois côtés AB, BC et CA d'un triangle et à l'extérieur de celui-ci on construit trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'.

Montrer que AA', BB' et CC' sont concourantes en un point F, qu'elles font entre elles des angles de $2\pi/3$ et que les segments AA', BB' et CC' ont la même longueur.

On suppose maintenant que tous les angles du triangle ont des mesures inférieures à $2\pi/3$. Montrer que la fonction

$$M \longmapsto MA + MB + MC$$

a un minimum, atteint en F.

Similitudes

Exercice III.40. On donne deux points (distincts) A et A' et deux nombres réels θ et k (avec $k > 0$). Où se trouve le centre de la similitude directe d'angle θ et de rapport k qui envoie A sur A' ?

***Exercice III.41* (Cas de similitude des triangles).** Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Avec chacune des hypothèses suivantes, montrer que ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables (c'est-à-dire qu'il existe une similitude directe φ telle que $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ et $C' = \varphi(C)$).

(1) Premier cas de similitude, « un angle égal entre deux côtés proportionnels », en clair :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \text{ et } (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

(2) Deuxième cas de similitude, « deux angles égaux », en clair :

$$\big(B'C', B'A'\big) = (BC, BA) \text{ et } \big(C'A', C'B'\big) = (CA, CB)$$

(égalité d'angles de droites).

Exercice III.42. On fixe une droite $\mathcal{D}$ et un point A hors de $\mathcal{D}$. À un point B variant sur $\mathcal{D}$, on associe l'unique point C tel que ABC reste directement semblable à un triangle fixé. Trouver le lieu de C et celui de l'orthocentre de ABC quand B parcourt $\mathcal{D}$.

Exercice III.43. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles et S un point à l'extérieur de la bande qu'elles déterminent. Une droite variable issue de S coupe $\mathcal{D}$ en M et $\mathcal{D}'$ en M'. On demande de déterminer le lieu des points de contact T et T' des tangentes issues de S au cercle de diamètre MM'.

Exercice III.44. On donne un arc de cercle Γ d'extrémités A et B.

– À tout point M de Γ distinct de A et B, on associe le point M' de la demi-droite BM d'origine B tel que $BM' = AM$. Quel est le lieu des points M' quand M parcourt Γ ?

– À tout point M de Γ distinct de A et B, on associe le point M'' de la demi-droite opposée à la demi-droite MA d'origine M tel que $MM'' = BM$. Quel est le lieu des points M'' quand M parcourt Γ ?

Exercice III.45. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O' sécants en deux points I et J et soit σ la similitude directe de centre I telle que $\sigma(O) = O'$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ et que, pour tout point M de $\mathcal{C}$, les points M, $\sigma(M)$ et J sont alignés. Déterminer le lieu de la projection orthogonale P de I sur $M\sigma(M)$ quand M décrit $\mathcal{C}$. Déterminer le lieu du centre de gravité du (et du centre du cercle circonscrit au) triangle $IM\sigma(M)$ quand M décrit $\mathcal{C}$.

Cercles et inversions

***Exercice III.46* (Construction de l'axe radical).** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles supposés non concentriques. Soit Γ un cercle qui coupe $\mathcal{C}$ en A et B et $\mathcal{C}'$ en A' et B'. Montrer que l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la perpendiculaire à la droite des centres passant par le point d'intersection de AB et $A'B'$.

Exercice III.47. Soient A', B' et C' les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans le triangle ABC. Les droites BC et $B'C'$ se coupent en α, CA et $C'A'$ en β, AB et $A'B'$ en γ. Montrer que $\overrightarrow{\alpha B} \cdot \overrightarrow{\alpha C} = \overrightarrow{\alpha B'} \cdot \overrightarrow{\alpha C'}$.

Que peut-on dire de α, β et γ ? Quel est l'axe radical du cercle circonscrit à ABC et de son cercle d'Euler (on rappelle que c'est le cercle circonscrit à $A'B'C'$, voir l'exercice II.21) ?

***Exercice III.48* (Le théorème de Pascal pour les cercles).** On considère six points A, B, C, D, E et F d'un cercle $\mathcal{C}$. On suppose que l'hexagone $ABCDEF$ n'a pas de côtés parallèles. On considère les points d'intersection

$$S = AB \cap DE, \quad T = CD \cap AF \quad \text{et} \quad U = BC \cap EF.$$

On veut montrer que S, T et U sont alignés (figure 35). Soient P, Q et R les points d'intersection $CD \cap FE$, $FE \cap AB$ et $AB \cap CD$. En considérant les droites SDE, ATF et BCU comme des transversales aux côtés de PQR, montrer l'égalité

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SR}} \cdot \frac{\overline{TR}}{\overline{TP}} \cdot \frac{\overline{UP}}{\overline{UQ}} = 1$$

et conclure (la version la plus générale de ce théorème est l'énoncé VII.4.4).

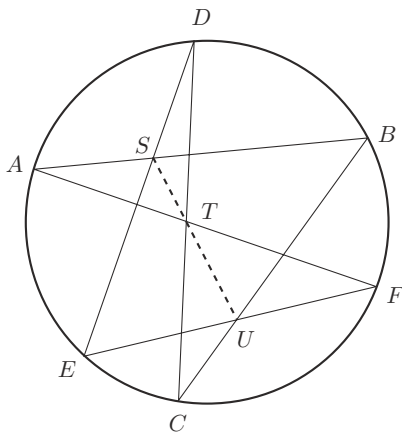


Figure 35. Théorème de Pascal

Exercice III.49. On identifie le plan à $\mathbf{C}$. Si A est un point d'affixe a, montrer que l'inversion $I_{A,k}$ envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe

$$z' = a + \frac{k}{\overline{z} - \overline{a}}.$$

Exercice III.50. Les inversions forment-elles un groupe ? Montrer que la conjuguée d'une inversion par une autre inversion est encore (la restriction d') une inversion (on précisera pôle et puissance)[18].

Exercice III.51. Soient A et B deux points du plan, A' et B' leurs images par une inversion. Montrer que A, B, A' et B' sont cocycliques ou alignés.

Exercice III.52. Quels sont les cercles conservés par une inversion ?

Exercice III.53. Quelle est l'image d'un cercle de centre O par une inversion de pôle O ?

Exercice III.54. Soient O un point et D une droite ne passant pas par O, de sorte que l'image de D par une inversion de pôle O est un cercle passant par O. Quelle est la tangente en O à ce cercle ?

Exercice III.55. Quelle est l'image du centre d'un cercle par une inversion dont le pôle n'est pas sur le cercle (voir la figure 19) ? Au fait, l'image du centre est-elle toujours à l'intérieur du cercle image ?

[18] Un nouvel avatar du principe de transport par conjugaison I.3.19.

Exercice III.56. Transformer par l'inversion de pôle A et de puissance AC^2 la figure formée du carré $ABCD$ et de son cercle circonscrit.

Exercice III.57. L'application définie par la formule $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est-elle affine ? Est-ce une inversion ?

Exercice III.58. Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, trouver toutes les inversions qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

Exercice III.59. Soient A, B, C et D quatre points alignés dans cet ordre. Trouver une inversion qui les envoie sur les quatre sommets consécutifs d'un rectangle.

Exercice III.60 **(« Invariant anallagmatique » de deux cercles)**
On considère deux cercles sécants[19] de rayons R et R'. On appelle d la distance de leurs centres. Montrer que le rapport

$$\frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'}$$

reste inchangé par une inversion quelconque.

Exercice III.61 **(Inégalité de Ptolémée).** Soient A, B, C et D quatre points d'un plan. Démontrer que

$$AB \cdot CD \leq AC \cdot BD + AD \cdot BC$$

(on pourra utiliser une inversion bien choisie). Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice III.62. On donne deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, un point A sur $\mathcal{C}$ et un point A' sur $\mathcal{C}'$. Trouver un point P sur l'axe radical Δ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tel que, si PA (resp. PA') coupe $\mathcal{C}$ en M (resp. M'), alors $MM' \perp \Delta$.

Exercice III.63. Quel est l'ensemble des centres des cercles d'un faisceau à points bases ? à points limites ?

Exercice III.64. Trouver le lieu des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles non concentriques donnés a une valeur donnée k.

Exercice III.65. Montrer que, pour que les trois cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ de centres et rayons respectifs (O, R), (O', R') et (O'', R'') appartiennent à un même faisceau, il faut et il suffit que les trois points O, O' et O'' soient alignés et que

$$R^2\overline{O'O''} + R'^2\overline{O''O} + R''^2\overline{OO'} + \overline{O'O''} \cdot \overline{O''O} \cdot \overline{OO'} = 0.$$

[19] Le résultat est vrai pour deux cercles quelconques, mais un peu plus pénible à établir directement, voir **[16]** et l'exercice VII.64.

Exercice III.66. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de cercles. Montrer que tout point du plan se trouve, en général, sur un (unique) cercle de $\mathcal{F}$. Quelles sont les exceptions ? Étant donné un point du plan, construire le cercle du faisceau $\mathcal{F}$ passant par ce point.

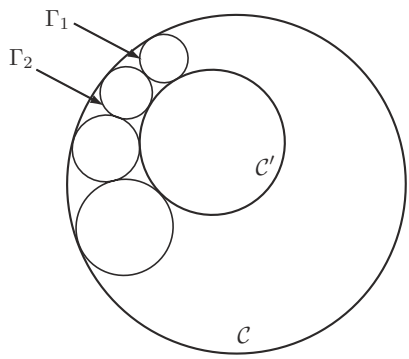


Figure 36. Alternative de Steiner

***Exercice III.67* (L'alternative de Steiner).** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles. On suppose que $\mathcal{C}$ est intérieur à $\mathcal{C}'$. Soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à $\mathcal{C}'$ et extérieurement à $\mathcal{C}$. On construit par récurrence une suite de cercles Γ_i de sorte que Γ_{i+1} soit tangent intérieurement à $\mathcal{C}'$, extérieurement à $\mathcal{C}$ et à Γ_i et différent de Γ_{i-1} (figure 36). Montrer que si pour un certain n, $\Gamma_n = \Gamma_1$, alors le même résultat est vrai, pour le même n, avec n'importe quel choix de Γ_1.

Exercice III.68. Déterminer le lieu des pôles des inversions qui transforment deux droites sécantes données en deux cercles de même rayon. En déduire les pôles des inversions qui transforment les trois côtés d'un triangle en trois cercles de même rayon. Montrer que ces inversions transforment le cercle circonscrit au triangle en un cercle qui a le même rayon que les trois autres.

Soient ABC un triangle, O le centre et R le rayon de son cercle circonscrit, I le centre et r le rayon de son cercle inscrit. Utiliser une inversion de pôle I qui conserve le cercle circonscrit pour montrer la « relation d'Euler » :

$$R^2 - OI^2 = 2rR.$$

***Exercice III.69* (Le théorème de Feuerbach).** Soit ABC un triangle et soient I le centre de son cercle inscrit $\mathcal{C}$, J le centre du cercle $\mathcal{C}'$ exinscrit dans l'angle en A, K et L les projections orthogonales de I et J sur le côté BC (figure 37).

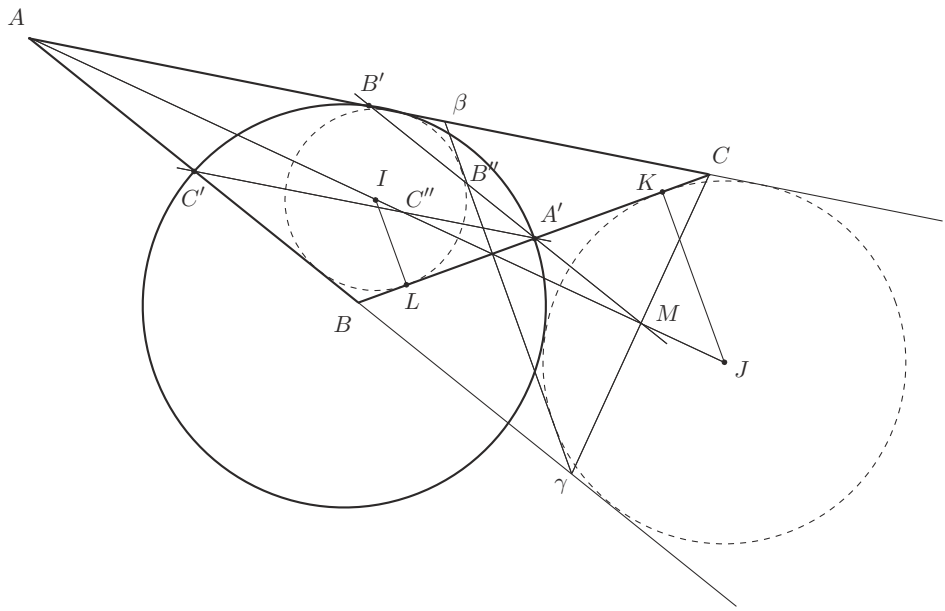


Figure 37

Montrer que I, J, B et C sont cocycliques. En utilisant le milieu N de IJ, montrer que le milieu A' de BC est le milieu de KL. Calculer $A'K$ et $A'L$ (on pourra utiliser l'exercice III.25).

On appelle B' et C' les milieux respectifs de AC et AB. Soient β et γ les symétriques de B et C par rapport à AI, de sorte que BC et $\beta\gamma$ sont les deux tangentes communes intérieures à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit M le milieu de γC. Montrer que $M \in AI \cap A'B'$. Calculer $A'M$.

Soient $B'' = A'B' \cap \beta\gamma$, $C'' = A'C' \cap \beta\gamma$. Montrer que l'inversion de pôle A' et de puissance $A'M^2$ échange B' et B'', C' et C''. En déduire que le cercle d'Euler (cercle circonscrit à $A'B'C'$, voir l'exercice II.21) est tangent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercices un peu plus théoriques

Exercice III.70. La différentielle en un point z_0 d'une application holomorphe définie sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est une application linéaire $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Quelle est cette application ? Montrer qu'une application holomorphe non constante conserve les angles.

***Exercice III.71* (Le théorème de Liouville).** Soit f une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dans lui-même. On suppose que f conserve les angles (au sens expliqué par la figure 14 au § III.4). On veut montrer que f est une similitude.

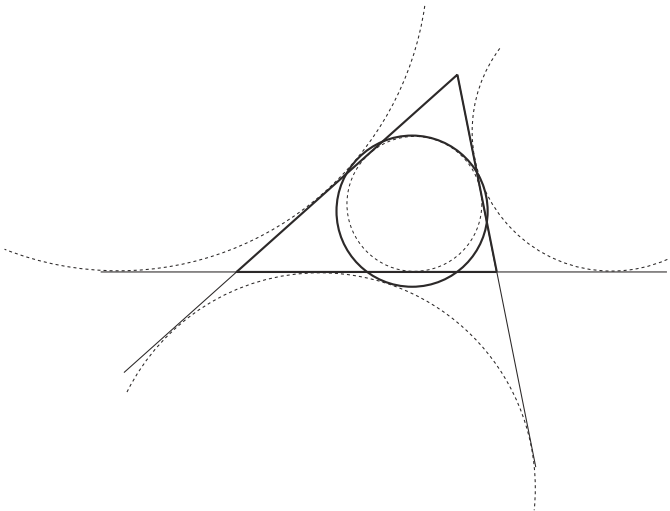


Figure 38. Théorème de Feuerbach

(1) Pour tout point M de $\mathcal{P}$, la différentielle df_M est une application linéaire $P \to P$. Montrer que df_M est, soit une similitude directe pour tout M, soit une similitude indirecte pour tout M. En composant au besoin avec une réflexion, montrer qu'on peut supposer que df_M est une similitude directe pour tout M.

(2) On choisit un repère orthonormé et on identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbf{C}$. On note df_z pour la différentielle de f au point M d'affixe z. Ainsi df_z est une application linéaire (*a priori* sur $\mathbf{R}$) de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ et on suppose que c'est une similitude directe. Montrer que f est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ (ce qu'on appelle une fonction *entière*).

(3) Utiliser les résultats classiques sur les fonctions entières[20] et l'hypothèse que f est bijective pour conclure que f est un polynôme de degré 1... c'est-à-dire une similitude directe.

(4) Pourquoi n'est-ce pas contradictoire avec le corollaire III.4.5 ?

[20] Voir par exemple [**11**] ou [**50**].

IV

CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Une bonne partie des problèmes de géométrie classique et presque toute l'algèbre moderne[1] sont issus de questions de construction « à la règle et au compas », dont la plupart ont été posées dans l'Antiquité.

Les problèmes posés dans l'Antiquité sont les suivants :

– La duplication du cube — à Délos, pour enrayer une épidémie de peste, l'oracle du temple d'Apollon aurait exigé la construction d'un temple double de celui qui existait — il s'agit de construire le nombre $\sqrt[3]{2}$.

– La quadrature du cercle — construire un carré dont l'aire soit celle d'un cercle donné — il s'agit de construire le nombre $\sqrt{\pi}$.

– La trissection de l'angle — construire deux droites partageant un angle donné en trois parties égales.

Un problème peut-être plus récent est :

– Quels polygones réguliers peut-on construire à la règle et au compas ?

Il va sans dire, mais disons-le tout de même, que ces problèmes de construction n'ont jamais eu aucune application concrète directe : il a toujours été beaucoup plus facile de dessiner un pentagone régulier avec un rapporteur qu'avec une règle et un compas, ne parlons pas d'un heptadécagone — ne parlons pas non plus des possibilités graphiques offertes par les ordinateurs. Une petite digression : les mêmes remarques valent pour la résolubilité des équations algébriques par radicaux, qui est à la source de la théorie de Galois et qui n'a jamais eu d'intérêt appliqué direct puisque déjà à l'époque de Galois et d'Abel, on savait résoudre les équations de façon approchée avec beaucoup de précision (par la méthode de

[1] Dans la tradition de l'enseignement supérieur français, ces questions sont abordées, au mieux, dans les cours de théorie de Galois.

Newton). Et pourtant ces problèmes « sans intérêt » sont à la source de mathématiques qui ont prouvé leur utilité pratique. Et en plus, c'est joli, alors allons-y.

IV.1. La règle du jeu

La règle, justement, est une règle (et pas un double-décimètre), elle sert à tracer des droites, pas à mesurer des longueurs. L'écartement du compas permet de reporter les longueurs. Il y a des points, des droites et des cercles *construits* ou *constructibles*. Voici les règles :

– La droite joignant deux point construits est constructible, de même le cercle dont le centre est un point construit et qui passe par un point construit est constructible. Attention, la droite est et le cercle seront construits... mais pas leurs points. Par contre, une droite construite contient toujours deux points construits.

– Les points d'intersection des droites et cercles ainsi construits sont construits.

Exemples IV.1.1 **(Exemples de constructions de droites)**

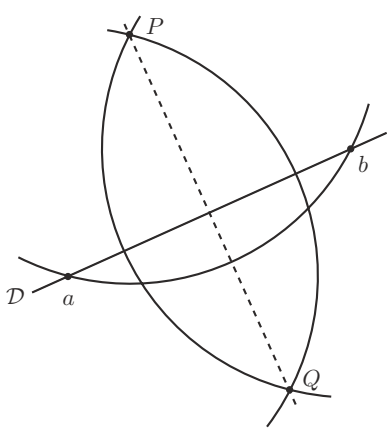


Figure 1

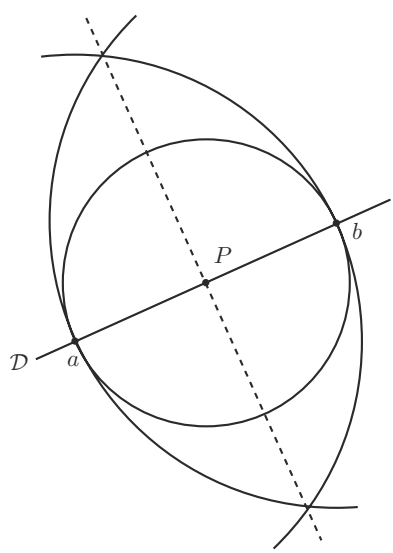


Figure 2

(1) On donne une droite $\mathcal{D}$ et un point $P \notin \mathcal{D}$. On peut construire la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par P. On trace un cercle de centre P passant par un point a construit de $\mathcal{D}$ (qui contient au moins un point construit qui n'est pas sur la perpendiculaire cherchée) ; ce cercle coupe $\mathcal{D}$ en un autre point b (qui est distinct

de a puisque celui-ci n'est pas sur la perpendiculaire) ; on trace ensuite les deux cercles de centres a et b passant par P, qui se coupent en P et en un autre point Q (puisque $P \notin \mathcal{D}$). La droite PQ est la perpendiculaire cherchée (figure 1).

(2) On donne une droite $\mathcal{D}$ et un point $P \in \mathcal{D}$. On peut construire la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par P. On procède de même, remplaçant les cercles de centres a et b passant par P par les cercles de centre l'un passant par l'autre (figure 2).

(3) On donne une droite $\mathcal{D}$ et un point P en dehors de $\mathcal{D}$. On peut construire la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par P, en traçant la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par P (construction (1)) puis la perpendiculaire à celle-ci toujours passant par P (construction (2)).

(4) On donne deux points I et J, une droite $\mathcal{D}$ et un point P de $\mathcal{D}$. On peut construire les points M de $\mathcal{D}$ tels que $PM = IJ$. On construit la parallèle d à $\mathcal{D}$ passant par I (construction (3)) puis le cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par J, qui coupe d en q et q'. La parallèle à AP passant par q (resp. q') coupe $\mathcal{D}$ en M (resp. M') ayant les propriétés voulues (figure 3).

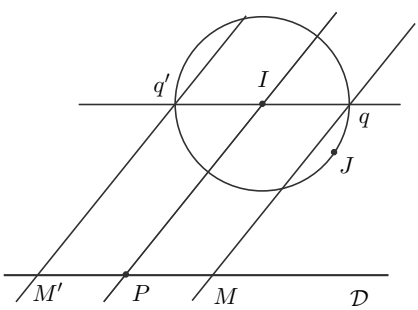


Figure 3

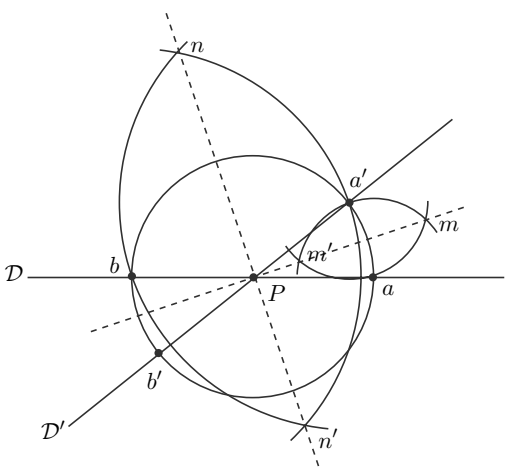


Figure 4

(5) On donne deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupant en P. On peut construire les bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Sur la droite $\mathcal{D}$, il y a un autre point construit, disons a. On trace le cercle de centre P passant par a ; il coupe $\mathcal{D}$ en a et b, $\mathcal{D}'$ en a' et b' ; les cercles de centre a (resp. b) passant par a' et de centre a' (resp. b) passant par a (resp. par a') se coupent en m et m' (resp. en n et n'). Les bissectrices sont les droites Pm et Pn (figure 4).

Remarque IV.1.2. Tracer un cercle de centre B et de rayon AO, où O, A et B sont construits, n'a pas été autorisé par nos règles, c'est pourquoi il est nécessaire de vérifier la propriété (4).

IV.2. Les nombres constructibles

On part maintenant de deux points O et A, supposés construits, desquels on déduit les droites, cercles, points que les règles du jeu nous autorisent à construire. On utilise la distance OA comme unité.

On dit qu'un nombre réel $a \in \mathbf{R}$ est *constructible* s'il existe deux points constructibles M et N avec $MN = |a|$.

Proposition IV.2.1. *L'ensemble* $\mathbf{K}$ *des nombres réels constructibles est un sous-corps de* $\mathbf{R}$. *Si* $a \in \mathbf{K}$ *est positif, alors* $\sqrt{a} \in \mathbf{K}$.

Cette proposition affirme simplement que, si a et b sont constructibles et positifs, $a+b$, $a-b$, ab, $1/a$ (si $a \neq 0$) et $\sqrt{|a|}$ le sont aussi.

Démonstration. À l'aide des constructions précédentes, nous savons reporter une distance constructible à partir d'un point donné, ce qui donne la construction de $a+b$ et de $a-b$. Les longueurs ab et $1/a$ sont obtenues en appliquant le théorème de Thalès, comme le montrent les figures 5 et 6.

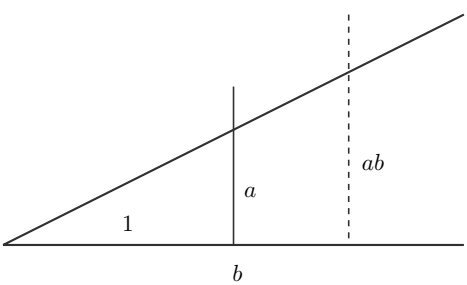


Figure 5

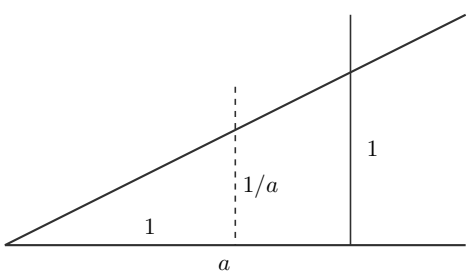


Figure 6

La construction de la racine carrée est donnée, elle, par le théorème de Pythagore. On dessine un cercle de diamètre $1+a$, comme sur la figure 7. Les deux triangles AHC et CHB sont semblables, donc

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{b} \text{ et } b = \sqrt{a}.$$

□

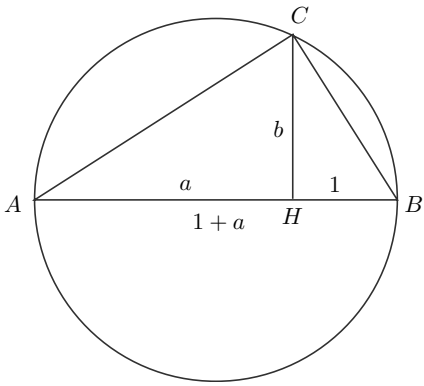


Figure 7

À partir de nos deux points construits O et A, on peut construire la perpendiculaire à OA passant par O et un point B sur celle-ci de façon que $OB = OA$. On a ainsi un repère orthonormé et des coordonnées cartésiennes.

Proposition IV.2.2. *Le point M est constructible si et seulement si ses coordonnées sont des nombres constructibles.*

Démonstration. Les valeurs absolues des coordonnées de M sont les longueurs Om et Om' où m et m' sont les projetés de M sur les axes, des points constructibles. Réciproquement, si les coordonnées sont constructibles, m et m' le sont et M aussi, comme intersection de la parallèle à OB passant par m et de la parallèle à OA passant par m'. □

***Théorème IV.2.3* (Wantzel).** *Le degré d'un nombre constructible est une puissance de* 2.

Remarque IV.2.4. Ce théorème a de nombreuses applications, comme on va le voir rapidement : un nombre algébrique de degré 3 sur $\mathbf{Q}$ n'est jamais constructible, par exemple. Contrairement à ce que l'on entend parfois, ce n'est pas un résultat de théorie de Galois, puisque la démonstration n'utilise pas de groupe de Galois. Elle utilise cet invariant extrêmement grossier qu'est le degré d'une extension de $\mathbf{Q}$, la dimension d'un espace vectoriel. Aussi fruste soit la notion de degré, elle permet de régler les problèmes de construction classiques posés au début de ce chapitre !

Démonstration du théorème IV.2.3. Les points constructibles s'obtiennent en intersectant des droites et des cercles déjà construits. Remarquons d'abord que,

dans notre repère, une droite passant par deux points construits a une équation

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A)$$

à coefficients constructibles. De même un cercle de centre construit passant par un point construit

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Les coordonnées de l'intersection de deux droites construites s'obtient en résolvant un système linéaire... dont la solution est dans $\mathbf{K}$ si les coefficients y sont. Intersecter une droite construite et un cercle construit est un peu plus délicat — c'est là qu'apparaissent les extractions de racines carrées. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbf{K}$. La célèbre formule pour ces solutions donne le résultat escompté,

$$\text{si } a, b, c \in \mathbf{K} \text{ avec } a \neq 0, \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbf{K}$$

puisque celui-ci est stable par racine carrée. Il nous reste à considérer l'intersection de deux cercles construits. Mais l'intersection de deux cercles est l'intersection d'un des deux cercles avec une droite (l'axe radical des deux cercles) ou, si l'on préfère,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y - c' = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0 \\ 2(a - a')x + 2(b - b')y + c - c' = 0 \end{cases}$$

ce qui ramène au cas de l'intersection d'une droite et d'un cercle, terminant la démonstration. □

Attention, la réciproque de ce théorème est fausse, il existe des nombres algébriques dont le degré est une puissance de 2 et qui ne sont pas constructibles. Il suffit en effet d'exhiber un nombre algébrique de degré 4 qui ne soit pas constructible. C'est le cas d'une des racines du polynôme $X^4 - X - 1$, un exemple classique que l'on trouvera traité ici dans l'exercice IV.9 (ou ailleurs dans le livre [**10**]). Voici l'énoncé qui caractérise les nombres réels constructibles.

Théorème IV.2.5. *Pour qu'un nombre réel a soit constructible, il faut et il suffit qu'il existe une suite finie $a_1, \ldots, a_n$ tels que, si $K_1 = \mathbf{Q}(a_1)$ et $K_{i+1} = K_i(a_{i+1})$ pour tout i, les degrés $[K_{i+1} : K_i]$ soient tous égaux à 2 et $a \in K_n$.* □

Ce qui peut aussi s'exprimer en termes de la structure du groupe de Galois de K_n sur $\mathbf{Q}$ et dont on trouvera des démonstrations dans tous les livres de théorie de Galois, par exemple dans [**53**] ou [**21**].

IV.3. Applications à des problèmes de construction

La duplication du cube

Le nombre $\sqrt[3]{2}$ est un nombre algébrique de degré 3 sur $\mathbf{Q}$, il n'est donc pas constructible, en vertu du théorème IV.2.3. La duplication du cube est donc impossible !

Remarque IV.3.1. En dimension 2 ou 4, les cubes sont duplicables. Pour la dimension 2, c'est bien classique (figure 8), pour la dimension 4, on construit $\sqrt{\sqrt{2}}$.

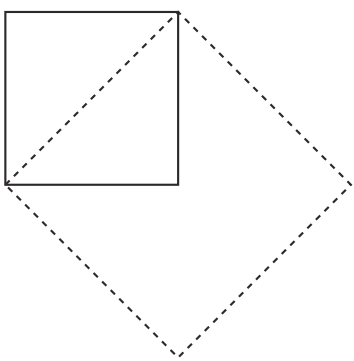


Figure 8

La quadrature du cercle

Nous l'avons dit, le problème de la quadrature du cercle est celui de la constructibilité du nombre $\sqrt{\pi}$ ou, ce qui revient au même, à cause de la proposition IV.2.1, de celle de π. Comme $\mathbf{K}$ est contenu dans le corps des nombres algébriques, le théorème de Lindeman, qui affirme (depuis 1882) que π est transcendant, implique l'impossibilité de la quadrature du cercle.

La trissection de l'angle

On dit qu'un angle θ est constructible si le point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ l'est ou, ce qui est équivalent, si $\cos\theta$ est constructible.

Par exemple, les angles dont le cosinus est $1/\sqrt[3]{2}$ ne sont pas constructibles.

La question de la trissection des angles se formule de la façon suivante : si 3θ est un angle constructible, θ est-il un angle constructible ?

Proposition IV.3.2 **(Impossibilité de la trissection de l'angle)**
Il existe un nombre réel θ tel que 3θ soit constructible mais pas θ.

Remarque IV.3.3. Évidemment, il existe des angles que l'on peut trissecter : si θ est constructible, alors 3θ est constructible (reporter trois fois la corde sous-tendant un arc de mesure θ) et est trissectable. Par exemple, $3\theta = \pi$ ou $3\theta = \pi/2$.

Démonstration. Tout aussi évidemment, pour démontrer la proposition, nous allons exhiber un exemple, précisément ici l'exemple sera $\theta = \pi/9$. Commençons par remarquer que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

de sorte que, avec $3\theta = \pi/3$, $\alpha = \cos\pi/9$ est une racine du polynôme

$$4X^3 - 3X - \frac{1}{2}.$$

Ce polynôme de degré 3 n'a pas de racine rationnelle. En effet, si p/q (avec p et q premiers entre eux) était une racine, on aurait

$$4\frac{p^3}{q^3} - 3\frac{p}{q} - \frac{1}{2} = 0, \text{ soit } 8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$$

de sorte que p divise q^3, donc $p = \pm 1$, et q^2 divise $8p^3$, donc $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$ et $p/q = \pm 1$ ou $\pm 1/2$, dont aucun n'est racine du polynôme. Lequel polynôme est donc irréductible, ce qui fait que le degré de α sur $\mathbf{Q}$ est 3 et que α n'est pas constructible. □

IV.4. La question des polygones réguliers

La question de la constructibilité du polygone régulier à n côtés est celle de déterminer pour quels entiers n l'angle $2\pi/n$ est constructible.

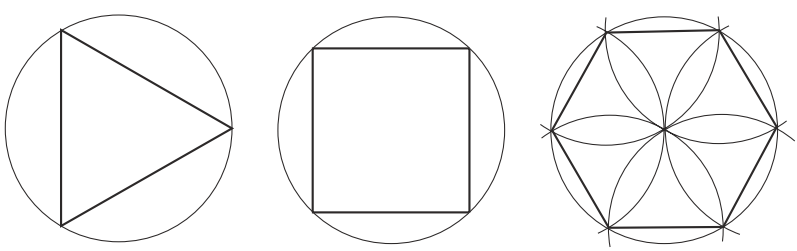


Figure 9

C'est clairement le cas pour $n = 3$ (triangle équilatéral), $n = 4$ (carré), $n = 6$ (hexagone régulier). Plus généralement, si c'est le cas pour n, c'est aussi le cas pour $2^k n$ (par bissection).

Le pentagone régulier

Pour étudier l'éventuelle constructibilité du pentagone régulier, on évalue $\alpha = \cos \dfrac{2\pi}{5}$. Posons $\zeta = e^{2i\pi/5}$. C'est une racine, différente de 1, du polynôme $X^5 - 1$, donc une racine de

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

On a $\zeta^4 = \overline{\zeta}$, donc

$$\zeta^4 + \zeta = 2\cos\frac{2\pi}{5} \text{ et de même } \zeta^3 + \zeta^2 = 2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Comme aussi

$$\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 = 2\alpha^2 - 1,$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 \\ &= 4\alpha^2 + 2\alpha - 1. \end{aligned}$$

Donc α est racine d'un polynôme du second degré et en particulier constructible. On a donc démontré :

Proposition IV.4.1. *Le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas.* □

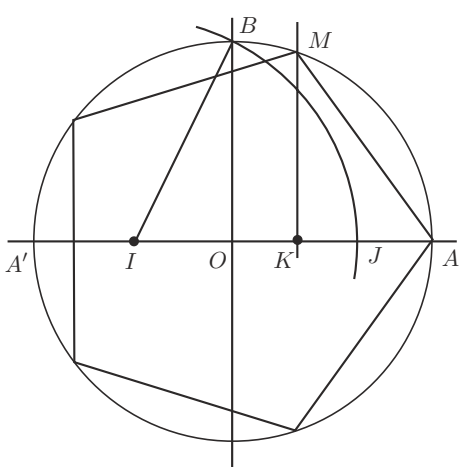


Figure 10

Pour construire effectivement le pentagone, on exprime α, la racine positive de ce polynôme,

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

La figure 10 montre une construction possible : AA' est un diamètre du cercle de centre O, I est le milieu du rayon OA', alors

$$BI = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Le cercle de centre I passant par B coupe le segment OA en un point J. Ainsi on a

$$IJ = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et } OJ = IJ - OI = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Finalement, le milieu K de OJ a l'abscisse désirée et un point M du cercle ayant cette abscisse permet de construire le pentagone.

Nombres premiers entre eux

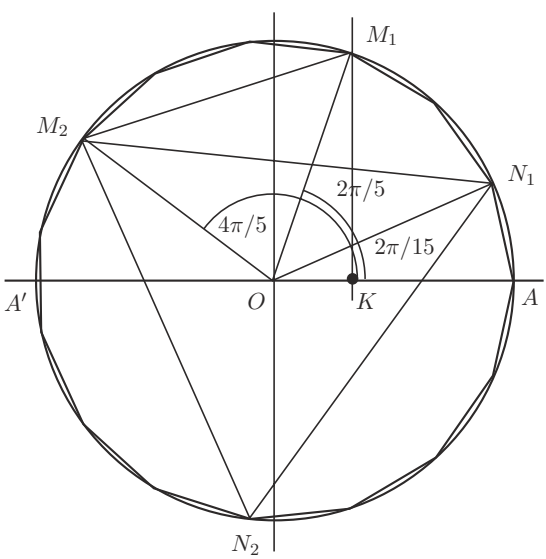


Figure 11

Proposition IV.4.2. *Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Pour que l'angle $2\pi/mn$ soit constructible, il faut et il suffit que les angles $2\pi/m$ et $2\pi/n$ le soient.*

Démonstration. Si $2\pi/mn$ est constructible, alors $2\pi/m = n2\pi/mn$ et $2\pi/n = m2\pi/mn$ le sont. Pour la réciproque, on utilise l'hypothèse que m et n sont premiers entre eux, c'est-à-dire le théorème de Bézout,

$$um + vn = 1, \text{ donc } \frac{2\pi}{mn} = u\frac{2\pi}{n} + v\frac{2\pi}{m},$$

ce qui permet de construire l'angle $2\pi/mn$ à partir des angles $2\pi/n$ et $2\pi/m$. □

***Exemple IV.4.3* (Polygone à quinze côtés).** On applique ce qui précède, qui montre que le polygone régulier à quinze côtés est constructible et qui fournit même une construction. On écrit

$$2 \times 3 - 1 \times 5 = 1, \text{ donc } 2\frac{2\pi}{5} - 1\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{15}.$$

La figure 11 montre la construction. On porte sur le cercle les points M_1 (obtenu comme sur la figure 10) et M_2 tels que A, M_1, M_2 soient le trois premiers sommets consécutifs d'un pentagone régulier (ainsi l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_2})$ a-t-il une mesure de $4\pi/5$; puis les points N_1 et N_2 tels que le triangle $M_2N_2N_1$ soit équilatéral. Alors l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON_1})$ a une mesure de $2\pi/15$ et l'on peut former le polygone régulier à quinze côtés en commençant par A et N_1.

Le théorème de Gauss

Alors, quels sont les polygones réguliers constructibles ? Ceux à 3, 4, 5, 6, 8, 10, mais pas ceux à 9 côtés (puisque l'angle de $\pi/9$ n'est pas constructible), pas 7 non plus, ni 11... mais 17 est possible ! Le théorème général est le suivant.

***Théorème IV.4.4* (Gauss).** *Un polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si*

$$n = 2^\alpha p_1 \cdots p_r$$

où α est quelconque, les p_i sont des nombres premiers distincts de la forme $2^{2^k} + 1$ (nombres de Fermat).

Par exemple, $3 = 2^{2^0} + 1$, $5 = 2^{2^1} + 1$... et $17 = 2^{2^2} + 1$ sont des nombres premiers de Fermat et le théorème affirme que l'on peut construire le polygone régulier à dix-sept côtés avec une règle et un compas. En utilisant une méthode proche (mais c'est plus compliqué) de celle qui nous a permis de construire le pentagone

en évaluant $\cos\frac{2\pi}{5}$, on peut utiliser le fait (à démontrer préalablement) que

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\Bigg[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\ +\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\Bigg]$$

une formule que je copie dans [**10**] pour la beauté de la typographie.

La démonstration du théorème de Gauss utilise, comme les exemples du pentagone et de l'heptadécagone, le fait que $e^{2i\pi/n}$ est une racine du polynôme cyclotomique et les propriétés de ce polynôme. Je renvoie par exemple à [**10**].

IV.5. Remarques supplémentaires

Le compas seul

Un théorème chéri des étudiants préparant l'agrégation, le théorème de Mohr-Mascheroni, affirme qu'avec seulement un compas, c'est-à-dire en n'autorisant que des intersections de cercles construits, on peut construire exactement les mêmes points qu'avec une règle et un compas. Voir [**10**].

La règle seule

Par contre, avec la règle seule, on ne peut pas faire grand chose. On entre là dans le domaine de la géométrie projective, les constructions possibles étant invariantes par projection ou perspective. Quatre points formant un repère projectif, il est préférable de partir de quatre points. Voir le chapitre VI pour ces notions et, toujours, le livre [**10**, chap. VIII]. On y trouvera aussi des constructions avec une règle et une équerre, une règle et un seul cercle...

Les courbes

Beaucoup de courbes algébriques (ou non) ont été inventées pour résoudre des problèmes de construction à la règle et au compas. On en trouvera des exemples dans les exercices du chapitre VIII.

Exercices et problèmes

Exercice IV.1. Soit $ABCD$ un rectangle. Construire un carré qui a la même aire.

Exercice IV.2. Soit ABC un triangle. Construire un carré qui a la même aire.

Exercice IV.3. On donne un point O et un point A_1. On utilise la distance OA_1 comme unité. Soient A_2 un point tel que OA_1A_2 soit rectangle en A_1 et isocèle, puis, par récurrence, A_n tel que $OA_{n-1}A_n$ soit rectangle et isocèle en A_{n-1}. Quelle est la longueur OA_n ?

Exercice IV.4. Construire le nombre $\sqrt[4]{3}$.

Exercice IV.5. L'angle de $1°$ est-il constructible ?

Exercice IV.6 **(La construction de Dürer du pentagone régulier)**

On donne deux points A et B. Les cercles $\mathcal{C}_A$ de centre A passant par B et $\mathcal{C}_B$ de centre B passant par A se coupent en I et J. Le cercle $\mathcal{C}_J$ de centre J passant par A et B recoupe $\mathcal{C}_A$ en C et $\mathcal{C}_B$ en D, la droite IJ en K. La droite CK coupe le cercle $\mathcal{C}_B$ en C' (celui des deux points d'intersection qui est à l'extérieur de $\mathcal{C}_A$) et, symétriquement, DK coupe $\mathcal{C}_A$ en D'. Enfin les cercles de centre respectifs C' et D' passant respectivement par B (respectivement A) se coupent en E (figure 12).

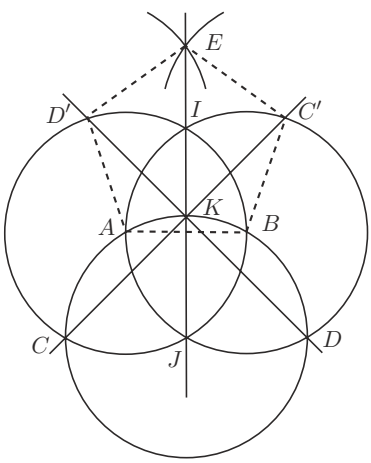


Figure 12

Vérifier que tous les côtés du pentagone $ABC'D'E$ ont la même longueur.

Montrer que le triangle CKD est rectangle en K et isocèle. Soient L et H les point d'intersection de DD' et IJ (respectivement) avec AB. En déduire que le triangle KHL est rectangle en H et isocèle et que l'on a

$$HL = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } AL = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Dans le triangle ALD', la mesure de l'angle en L vaut donc $45°$. Vérifier que le sinus de l'angle en D' vaut

$$\sin D' = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire que l'angle en A du pentagone de Dürer a une mesure légèrement supérieure à $108°$ et que ce pentagone n'est pas régulier.

***Exercice IV.7* (Non constructibilité de l'heptagone régulier)**

Montrer que $\cos(2\pi/7)$ est une racine du polynôme $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$. Vérifier que celui-ci est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et en déduire une confirmation du fait que l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.

***Exercice IV.8* (Construction d'un heptagone à la règle et au compas)**

On considère le cercle de centre O avec ses deux diamètres perpendiculaires AA' et BB'. Soit I le milieu de OA. La droite $B'I$ recoupe le cercle en J ; la parallèle à cette droite passant par O coupe l'arc AB en K. On désigne par J' et K' les projections de ces deux points sur OA. Montrer que

$$OJ' = \frac{4}{5} \text{ et } OK' = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

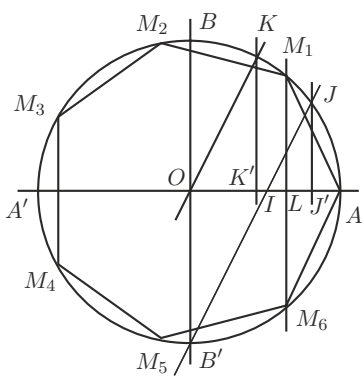


Figure 13

Le point M_1 de l'arc AB se projette sur le milieu L de $K'J'$. On appelle M_2 et M_3 les points du cercle tels que

$$(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}) = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1}),$$

M_4, M_5, M_6 les symétriques de M_3, M_2, M_1 (respectivement) par rapport à OA. Calculer les angles au centre $(\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_{i+1}})$. Que peut-on dire de l'heptagone $AM_1M_2M_3M_4M_5M_6$?

Exercice IV.9. Montrer que le polynôme $P(X) = X^4 - X - 1$ a exactement deux racines réelles. On l'écrit donc

$$P(X) = (X^2 + aX + b)(X^2 + a'X + b') \text{ avec } a, b, a', b' \in \mathbf{R},$$

où le premier trinôme a deux racines réelles et le second aucune. Montrer que

$$a^6 + 4a^2 - 1 = 0.$$

En déduire que a n'est pas constructible, puis qu'au moins une des racines réelles de P ne l'est pas.

V

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE DANS L'ESPACE

Dans ce chapitre, on se place dans un espace euclidien (affine ou vectoriel) de dimension 3. Après une étude des isométries et quelques rappels sur le produit vectoriel, on y attaque les sphères et plus particulièrement les triangles que les grands cercles y dessinent. Du calcul de l'aire de ces triangles, on déduit la formule d'Euler pour les polyèdres convexes et la liste des polyèdres réguliers.

V.1. Isométries et déplacements de l'espace

Les isométries vectorielles

Le théorème II.2.1 affirme qu'elles sont composées d'une, de deux ou de trois réflexions et la proposition II.3.14 nous en donne une forme matricielle : il existe une base orthonormée de l'espace vectoriel E de dimension 3 dans laquelle la matrice A de l'isométrie f a une des formes suivantes[1].

– Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, cas où f est une réflexion de plan engendré par les deux premiers vecteurs de la base,

– soit $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on dit alors que l'isométrie est une *rotation* d'axe la droite engendrée par le premier vecteur de la base ; c'est la forme de toutes les isométries positives (des éléments de $\mathrm{O}^+(E)$),

[1] Les coefficients qui n'apparaissent pas sont nuls.

– soit $A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on dit que l'isométrie est une *anti-rotation*.

Rotations

Attardons-nous un instant sur les rotations. Ce sont les isométries vectorielles composées de deux réflexions. Si P_1 et P_2 sont deux plans vectoriels se coupant le long d'une droite D, l'isométrie $s_{P_2} \circ s_{P_1}$ stabilise D (point par point) et le plan $Q = D^\perp$ (globalement). Dans ce plan, elle opère comme une rotation plane, c'est la composée $s_{D_2} \circ s_{D_1}$, où D_i désigne la droite $P_i \cap Q$ (voir la figure 1). On remarquera que, comme dans le cas des rotations planes, on peut choisir de façon arbitraire l'un des deux plans intervenant dans la décomposition (il doit quand même contenir la droite fixe D).

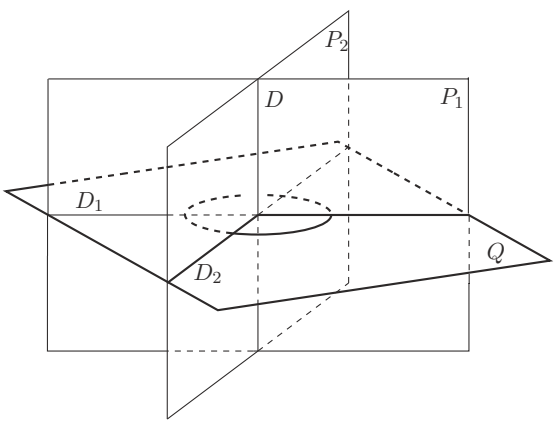


Figure 1

Dans une base orthonormée dont le premier vecteur, u, dirige D, la matrice de la rotation a la forme donnée ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a envie de dire que le (qu'un) nombre θ écrit dans cette matrice est *l'angle de la rotation*. Il faut être un peu prudent ici : ce nombre *dépend* de la base choisie.

Dans le plan, on a vu (au § II.3) qu'il fallait choisir une orientation pour bien définir θ (modulo 2π). Ici c'est un peu plus subtil : il faudrait avoir choisi des

orientations de tous les plans de l'espace, ce qui est impossible[2]. La solution est la suivante. On fixe d'abord une orientation de l'espace. Une rotation étant donnée, on choisit une orientation (ou un vecteur unitaire u) sur sa droite fixe D. Celle-ci devient ainsi un *axe*. On complète u en une base orthonormée de l'espace et on écrit la matrice de la rotation dans cette base. On obtient ainsi un nombre θ (au moins modulo 2π). La rotation peut alors être notée $\rho_{u,\theta}$ et le nombre θ peut être appelé son *angle*... étant bien entendu que l'on a

$$\rho_{-u,\theta} = \rho_{u,-\theta}.$$

En bref, pour mesurer l'angle d'une rotation, il est nécessaire d'orienter (l'espace *et*) la droite des points fixes de cette rotation. C'est sans doute pourquoi on appelle cette droite l'*axe* de la rotation. Changer l'orientation de la droite transforme la mesure de l'angle en son opposée, changer l'orientation de l'espace aussi.

On trouvera confirmation de cette difficulté dans le fait que l'angle n'apparaît de façon intrinsèque (c'est-à-dire sans choix de base ou d'orientation) que par son cosinus, dans la trace de la rotation f, *via* la formule

$$\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos\theta.$$

Un cas particulier important est celui des *demi-tours*, qui sont à la fois les symétries orthogonales par rapport aux droites et les rotations d'angle π, obtenues comme composées de deux réflexions de plans orthogonaux.

Remarquons aussi, comme dans le cas du plan, que les translations sont les composées de deux réflexions de plans parallèles. Le vecteur de la translation s'obtient exactement comme en dimension 2 (voir le § III.2).

Les isométries affines

Comme dans le cas du plan (toujours le § III.2), on déduit la forme des isométries affines de l'espace affine euclidien de l'étude des isométries vectorielles (c'est-à-dire de la forme matricielle donnée par la proposition II.3.14) et des résultats généraux sur les points fixes des transformations affines (donnés par la proposition II.2.8).

On remarquera tout d'abord, en examinant les matrices données ci-dessus, que toutes les isométries vectorielles sauf les anti-rotations ont la valeur propre 1. Soit donc φ une isométrie affine de l'espace et soit $\overrightarrow{\varphi}$ l'isométrie vectorielle qui lui est associée.

– Si $\overrightarrow{\varphi}$ est l'identité, φ est une translation.

[2] On trouvera un énoncé précisant le sens du mot « impossible » dans l'exercice VI.48.

– Si $\overrightarrow{\varphi}$ est une réflexion de plan P, alors

– soit φ a un point fixe A : on vectorialise le plan affine en A et on applique le résultat vectoriel correspondant pour obtenir que φ est la réflexion par rapport au plan passant par A et dirigé par P ;

– soit φ n'a pas de point fixe : alors, en vertu de la proposition II.2.8, il existe un unique vecteur v de P et une unique réflexion ψ de plan dirigé par P telle que

$$\varphi = t_v \circ \psi = \psi \circ t_v.$$

L'isométrie φ est dite *symétrie glissée* orthogonale.

– Si $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation d'axe D,

– soit φ a un point fixe A : on vectorialise l'espace affine en A de sorte que φ s'identifie à $\overrightarrow{\varphi}$; on dit que φ est une *rotation* d'axe la droite passant par A et dirigée par D ;

– soit φ n'a pas de point fixe : toujours en utilisant la proposition II.2.8, un trouve un unique vecteur v de D et une unique rotation ψ d'axe $\mathcal{D}$ dirigé par D tels que

$$\varphi = t_v \circ \psi = \psi \circ t_v.$$

L'isométrie φ est dite *vissage* d'axe $\mathcal{D}$: on fait tourner l'espace autour de $\mathcal{D}$ et on pousse le long d'un vecteur de la direction de $\mathcal{D}$ (c'est bien ce qu'on fait quand on visse). Un nom plus savant, mais aussi imagé, est « déplacement hélicoïdal » .

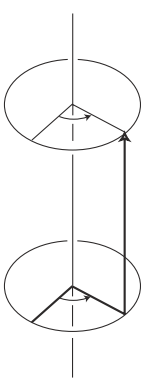


Figure 2. Vissage

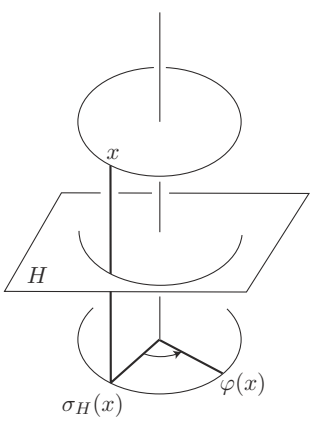


Figure 3. Anti-rotation

– Si $\overrightarrow{\varphi}$ est une anti-rotation, alors, d'après la proposition I.3.20), elle n'a pas de vecteur fixe non nul et φ a un unique point fixe A. Elle travaille donc en affine

comme le fait $\overrightarrow{\varphi}$ en vectoriel. On dit que c'est une *anti-rotation*. Elle est, par exemple, composée d'une rotation et d'une symétrie centrale.

V.2. Produit vectoriel, calculs d'aires

Dans cette partie, l'espace E est un espace vectoriel euclidien *orienté* de dimension 3.

Définition V.2.1. On définit le *produit vectoriel*, une opération sur les vecteurs, par

- $u \wedge v = 0$ si u et v sont colinéaires,
- $u \wedge v = w$, l'unique vecteur
  - orthogonal à u et v,
  - de longueur $\|u\| \, \|v\| \, |\sin \alpha|$ où α est une mesure de l'angle (u, v) (on remarquera que $|\sin \alpha|$ ne dépend d'aucun des choix faits pour définir cette mesure),
  - et tel que la base (u, v, w) soit directe,

sinon.

Remarques V.2.2

– Par exemple, si u et v sont deux vecteurs orthogonaux de longueur 1, les trois vecteurs $(u, v, u \wedge v)$ forment une base orthonormée directe de E.

– Le produit vectoriel dépend de l'orientation choisie, changer d'orientation transformant le résultat en son opposé.

Le produit vectoriel a des propriétés sympathiques, résumées dans l'énoncé suivant.

Proposition V.2.3. *Le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée*

$$E \times E \longrightarrow E.$$

De plus, le produit $u \wedge v$ est nul si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration. À part la bilinéarité, tout est évident à partir de la définition. Le mot *alternée* signifie que l'on a $u \wedge u = 0$ pour tout vecteur u, ou, ce qui est équivalent, que tous les vecteurs u et v vérifient $u \wedge v = -v \wedge u$.

Il reste à vérifier que cette opération est bilinéaire. Fixons un vecteur non nul u et montrons que l'application f_u définie par

$$f_u : v \longmapsto u \wedge v$$

est une application linéaire. On montre qu'en fait, cette application est une composition

$$f_u = h_{\|u\|} \circ r_{(u,\pi/2)} \circ p_u$$

de trois applications linéaires, respectivement une homothétie, une rotation et la projection sur le plan $u^\perp$.

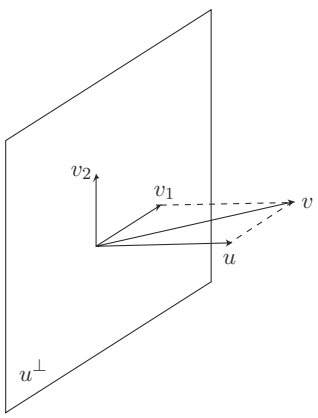


Figure 4

Pour obtenir le produit vectoriel $u \wedge v$, on commence par produire un vecteur v_2 de la droite $\langle u, v\rangle^\perp$ tel que la base (u, v, v_2) soit directe. Pour ceci, il suffit de projeter orthogonalement v sur $u^\perp$, obtenant un vecteur v_1 orthogonal à u, puis de faire subir à celui-ci une rotation d'angle $\pi/2$ autour de u, obtenant v_2 avec les propriétés voulues (figure 4).

Il reste à dilater v_2 pour le transformer en un w de longueur convenable. Mais on a

$$\|v_2\| = \|v_1\| = \|v\| \, |\sin \alpha| \, ,$$

il suffit de dilater v_2 en le multipliant par $\|u\|$. L'application f_u est donc bien composée des trois applications linéaires comme annoncé. □

Calculs en coordonnées

Le produit vectoriel s'exprime simplement dans les bases *orthonormées directes*.

Proposition V.2.4. *Dans une base orthonormée directe, les coordonnées du produit vectoriel s'expriment par les formules*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'espace vectoriel E. On vient de montrer que le produit vectoriel est bilinéaire. On a donc

$$\begin{aligned}(ae_1 + be_2 + ce_3) \wedge (xe_1 + ye_2 + ze_3) &= \\ = (bz - cy)e_2 \wedge e_3 + (cx - az)e_3 \wedge e_1 + (ay - bx)e_1 \wedge e_2.\end{aligned}$$

Si la base (e_1, e_2, e_3) est orthonormée et directe, on a aussi $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ et $e_1 \wedge e_2 = e_3$. On en déduit le résultat. □

Remarque V.2.5. Ces formules sont peut-être rassurantes, mais elles sont compliquées, au sens où elles peuvent mener à des calculs assez pénibles. Les utiliser à bon escient, c'est, dans chaque problème *choisir* la base orthonormée directe qui donne les formules les plus simples (on pourra par exemple traiter l'exercice V.18 par cette méthode).

Calculs d'aires planes

Plaçons-nous maintenant dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ *orienté* et considérons-le comme sous-espace d'un espace de dimension 3. Il existe un unique vecteur unitaire u, orthogonal à $\mathcal{P}$ et tel qu'une base directe de P complétée par u soit une base directe de E.

Étant donnés trois points A, B et C de $\mathcal{P}$, le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$, donc colinéaire au vecteur u :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \lambda u.$$

Si H est le projeté orthogonal de C sur AB, on a

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HC},$$

ce qui permet de calculer $|\lambda|$:

$$|\lambda| = AB \cdot HC.$$

On reconnaît le double de l'aire du triangle ABC.

On appelle *aire orientée* d'un triangle ABC l'unique nombre réel $\mathcal{A}(ABC)$ vérifiant l'égalité

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \mathcal{A}(ABC)u.$$

On aura remarqué que les aires orientées des triangles ABC et ACB ne coïncident pas, que l'aire orientée du triangle ABC est positive si et seulement si la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est directe... et que l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans cet ordre est le nombre λ considéré ci-dessus.

Notons enfin que l'aire orientée du triangle ABC est la moitié du déterminant de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ dans une base orthonormée directe.

Cette interprétation de l'aire à l'aide du produit vectoriel permet de démontrer très facilement :

Proposition V.2.6. *Soit ABC un triangle. Les coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère affine (A, B, C) sont proportionnelles aux aires orientées des triangles MBC, MCA, MAB.*

En d'autres termes (voir l'exercice I.44 pour la définition des coordonnées barycentriques),

$$\mathcal{A}(MBC)\overrightarrow{MA} + \mathcal{A}(MCA)\overrightarrow{MB} + \mathcal{A}(MAB)\overrightarrow{MC} = 0.$$

Démonstration. On écrit l'égalité

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = 0$$

dans laquelle α, β et γ sont les quantités à évaluer. On fait le produit vectoriel de cette relation avec chacun des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ et on obtient le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} & \beta\mathcal{A}(MAB) & -\gamma\mathcal{A}(MCA) & = & 0 \\ \alpha\mathcal{A}(MAB) & & -\gamma\mathcal{A}(MBC) & = & 0 \\ \alpha\mathcal{A}(MCA) & -\beta\mathcal{A}(MBC) & & = & 0. \end{array}\right.$$

Compte tenu de la proposition V.2.4, on peut réécrire ce système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(MBC) \\ \mathcal{A}(MCA) \\ \mathcal{A}(MAB) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \in \mathbf{R}^3.$$

En vertu de la proposition V.2.3, α, β et γ sont solutions du système si et seulement si les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(MBC) \\ \mathcal{A}(MCA) \\ \mathcal{A}(MAB) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

sont colinéaires et c'est ce qu'on voulait démontrer. □

V.3. Sphères, triangles sphériques

On va se placer ici sur une sphère de l'espace euclidien. Rappelons que les plans passant par le centre d'une sphère rencontrent celle-ci le long de *grands* cercles, des cercles dont le rayon est celui de la sphère. Les autres plans coupent aussi la sphère selon des cercles (éventuellement vides ou réduits à des points) de rayon plus petit, les *petits* cercles. Les *méridiens* de la géographie sont des grands cercles, les *parallèles* en général des petits cercles (voir les exercices V.35 et V.36).

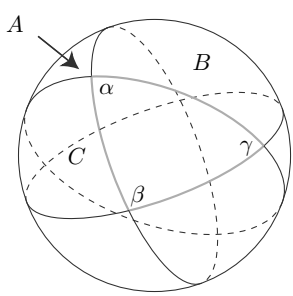


Figure 5. Triangle sphérique

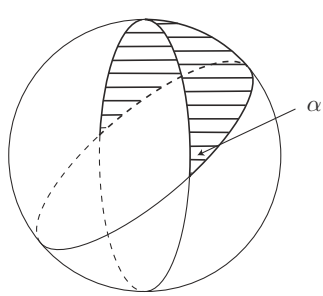


Figure 6. Fuseau

On appelle *triangle sphérique* la figure délimitée par trois arcs de grands cercles (figure 5) et *fuseau* la partie de la sphère limitée par deux grands cercles définis par deux plans (figure 6).

Le premier résultat de cette partie concerne l'aire des triangles sphériques. Il n'est pas question de faire ici une théorie de ce que peut être l'aire sur une sphère. De la théorie de la mesure, je vais utiliser les propriétés suivantes. Il existe une fonction *aire*, définie sur un ensemble de parties de la sphère qui contient les fuseaux et les triangles, qui prend des valeurs positives et qui vérifie

- l'aire est invariante par isométries,
- elle est additive et
- l'aire totale d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

Comme conséquence de l'additivité, l'aire d'un fuseau d'angle α (figure 6), est $\alpha/2\pi$ fois l'aire de la sphère, soit $2\alpha R^2$.

Aire des triangles sphériques

Plaçons-nous désormais (pour la suite de ce chapitre) sur une sphère de rayon 1.

On va exprimer l'aire d'un triangle sphérique à l'aide de mesures de ses angles. Commençons par une précision sur ces « angles ». L'angle de deux grands cercles, c'est l'angle de leurs plans. Il faudrait donc être capable de mesurer l'angle de deux plans. On a vu (au § V.1) que ce n'était pas évident : si D est la droite le long de laquelle ces deux plans se coupent, on peut mesurer l'angle dans le plan $D^\perp$... pourvu que D soit orientée. Il reste un angle géométrique dans ce plan, à qui on peut assigner un nombre $\alpha \in [0, \pi]$ qu'on appellera souvent l'*angle des deux plans*.

***Proposition V.3.1* (Formule de Girard).** *Soit T un triangle sphérique d'angles α, β et γ. Alors*

$$\textit{Aire}\ (T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Démonstration. Soit D la demi-sphère contenant T et déterminée par le grand cercle opposé à l'angle α. On écrit D comme réunion de T et de trois autres parties :

- la partie A de D opposée à l'angle α,
- le complémentaire B du triangle T dans le fuseau d'angle β
- et le complémentaire C de ce triangle dans le fuseau d'angle γ

(voir la figure 5). Ainsi l'aire de la demi-sphère D, qui vaut 2π, vaut aussi

$$\text{Aire}\ (D) = \text{Aire}\ (T) + \text{Aire}\ (A) + \text{Aire}\ (B) + \text{Aire}\ (C).$$

Par définition de B, son aire est l'aire du fuseau d'angle β à laquelle on retire l'aire de T. L'aire de C s'évalue de la même façon. On remarque enfin que l'aire de A se calcule aussi de cette façon puisque le fuseau d'angle α opposé au triangle est réunion de A et du triangle symétrique de T par rapport au centre de la sphère. On obtient enfin l'égalité

$$2\pi = \text{Aire}\ (T) + (2\alpha - \text{Aire}\ (T)) + (2\beta - \text{Aire}\ (T)) + (2\gamma - \text{Aire}\ (T))$$

d'où la formule annoncée. □

L'aire du triangle T est certainement un nombre strictement positif, donc un triangle sphérique est quelque chose de très différent d'un triangle euclidien plan.

Corollaire V.3.2. *La somme des angles d'un triangle sphérique est un nombre plus grand que π.* □

Remarque V.3.3. Imaginons une « géométrie » dont les points soient les points de la sphère et les droites les grands cercles : le plan est remplacé par la sphère, les droites par les grands cercles. Dans une telle géométrie, il n'y a pas de « droites » parallèles puisque deux grands cercles se coupent toujours. En particulier, par un point extérieur à une « droite », on ne peut mener *aucune* parallèle à cette droite. Rappelons qu'en géométrie euclidienne, la somme des angles d'un triangle est un angle plat (corollaire III.1.16) et que ceci est lié au postulat des parallèles (proposition I.2.17, voir aussi la figure 7 du chapitre III).

Le fait qu'ici la somme des angles d'un triangle soit toujours *plus grande* que π est liée à l'absence de parallèles. Il existe aussi des « géométries » dans lesquelles par un point extérieur à une droite on peut mener une infinité de parallèles à cette droite... et où la somme des angles des « triangles » est *plus petite* que π (voir l'exercice VI.52). Ces propriétés sont une manifestation de la *courbure* des espaces considérés, ici de la sphère (voir le chapitre IX).

Le corollaire V.3.2 explique pourquoi on ne peut dessiner de carte de la Terre sur laquelle à la fois les distances et les angles sont exacts. Voir les exercices V.45 et V.48.

V.4. Polyèdres, formule d'Euler

On va maintenant s'intéresser aux polyèdres convexes de l'espace affine de dimension 3.

Définition V.4.1. On appelle *polyèdre convexe* l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non coplanaires.

Remarques V.4.2

– L'hypothèse que les points sont en nombre fini garantit que le polyèdre est *compact* (voir l'exercice I.46).

– L'hypothèse que les points ne sont pas coplanaires garantit que le polyèdre est bien « de dimension 3 », précisément que son intérieur n'est pas vide (voir l'exercice I.47).

Un polyèdre est limité par des *faces*, polygones plans, lesquelles sont limitées par des *arêtes*, les côtés de ces polygones, les arêtes elles-mêmes sont limitées par

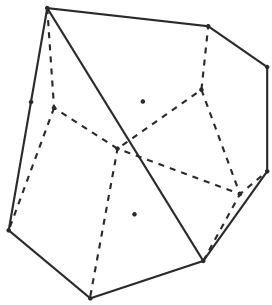


Figure 7

des *sommets*, leurs extrémités. Si cette propriété semble claire, elle n'en mérite pas moins une démonstration qui n'est pas complètement évidente[3]. Elle est basée sur la caractérisation des polyèdres convexes exprimée dans la proposition suivante.

Proposition V.4.3. *Tout polyèdre convexe est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Inversement, toute intersection compacte d'un nombre fini de demi-espaces fermés est un polyèdre convexe.*

La première assertion est liée à l'existence d'« hyperplans d'appui » (ce sont les faces), la seconde à celle de points extrémaux (ce sont les sommets). Je renvoie à **[5]** pour une démonstration. On admettra aussi, ce qui n'est pas non plus complètement évident, qu'un polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

La formule d'Euler

Tout ceci étant admis, on appelle F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets d'un polyèdre P. La formule d'Euler est un énoncé à la fois simple et remarquable :

***Théorème V.4.4* (Formule d'Euler).** *Pour tout polyèdre convexe, les nombres F de faces, A d'arêtes et S de sommets satisfont à la relation*

$$F - A + S = 2.$$

Démonstration. On choisit un point O dans l'intérieur de P, on munit l'espace affine d'une structure euclidienne et on considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de

[3] Les lecteurs qui ne sont pas convaincus qu'il n'est pas évident de définir un polyèdre, ses faces, ses sommets *etc.*, sont invités à lire **[29]**.

rayon 1. On considère l'image de P par la projection radiale $x \mapsto x/\|x\|$, qui envoie

– les arêtes du polyèdre sur des arcs de grands cercles : un segment MN est envoyé sur l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan OMN,

– et ses faces sur des polygones sphériques.

On a ainsi construit une variante courbe de notre polyèdre, dessinée sur la sphère $\mathcal{S}$. La démonstration consiste à calculer de deux façons différentes la somme de tous les angles de tous les polygones sphériques obtenus.

– D'une part, en chaque sommet, la somme est 2π, et donc la somme totale est $2\pi S$.

– D'autre part, c'est aussi la somme de tous les angles de toutes les faces. Maintenant, en triangulant un polygone à k sommets et en appliquant la formule de Girard (proposition V.3.1), on remarque que la somme des angles de ce polygone est son aire à laquelle il faut ajouter $(k-2)\pi$.

On a ainsi évalué

$$2\pi S = \sum_{f \text{ face}} \left(\text{Aire } (f) \ + (\text{nombre de sommets de } f - 2)\pi\right).$$

La somme des aires de toutes les faces est l'aire de la sphère unité, soit 4π. Comme chaque face a autant d'arêtes que de sommets et comme chaque arête appartient à deux faces, la somme des nombres de sommets de toutes les faces est $2A$ et il nous reste l'égalité

$$2\pi S = 4\pi + 2A\pi - 2F\pi,$$

qui donne la formule d'Euler quand on la divise par 2π. □

Remarque V.4.5. Comme on le voit dans cette démonstration, la formule d'Euler est liée au corollaire V.3.2, c'est-à-dire, finalement, à la courbure de la sphère. On y reviendra au chapitre IX.

Corollaire V.4.6. *Soit P un polyèdre convexe dont toutes les faces ont le même nombre s de sommets et tel que de chaque sommet parte le même nombre r d'arêtes. Alors $\{r, s\} \in \{\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}\}$.*

Démonstration. Dans cette situation, on a

– d'une part, $sF = 2A$ (chaque arête appartient à deux faces),

– de l'autre, $rS = 2A$ (chaque arête a deux extrémités).

De la formule d'Euler, on déduit donc la relation

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

Comme le nombre d'arêtes A n'est pas nul, on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{r}>\frac{1}{2}.$$

Les polygones convexes constituant les faces de P ont au moins trois côtés, on a donc $s \geq 3$. De même, en chaque sommet, on assemble au moins trois faces, on a donc aussi $r \geq 3$. On en déduit les inégalités

$$\frac{1}{r}>\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

On a donc $r \leq 5$ et de même $s \leq 5$. □

Remarque V.4.7. Les nombres r et s déterminent A par la relation

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{s}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2},$$

ils déterminent donc aussi S et F puisqu'on a dit que $S = 2A/r$ et $F = 2A/s$.

Remarque V.4.8. Les nombres r et s jouent exactement le même rôle dans l'énoncé V.4.6. Il y a à cela une raison géométrique : étant donné un polyèdre P correspondant aux nombres r (nombre d'arêtes en chaque sommet) et s (nombre d'arêtes de chaque face), on peut construire un polyèdre correspondant aux nombres s et r, le *dual* de P (voir les exercices V.38, V.39, V.40 et des exemples sur les figures 10 et 11).

V.5. Polyèdres réguliers

Dans ce paragraphe, je veux montrer qu'il y a cinq types de polyèdres réguliers[(4)] dans l'espace de dimension 3. J'attire l'attention des lectrices sur deux problèmes : d'abord, il n'est pas évident de définir ce qu'est un polyèdre *régulier*, ensuite, le mot *type* mérite aussi une définition.

Polygones réguliers

Pour se faire une idée plus précise de ces deux problèmes, on peut commencer par les considérer dans le cas du plan.

On dit qu'un polygone convexe plan est *régulier* si tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure. C'est bien trivial ici, mais on remarquera quand même

[(4)] Cet énoncé fait, à mon avis, partie du patrimoine culturel de l'humanité, au même titre que *l'Odyssée*, les sonates de Beethoven ou les statues de l'Île de Pâques (pour ne pas parler des Pyramides) et il m'est difficile d'imaginer qu'un citoyen, *a fortiori* un professeur de mathématique, l'ignore.

– que l'égalité des côtés ne suffit pas (il existe des losanges non carrés),
– pas plus que l'égalité des angles (il existe des rectangles non carrés)[5].

En triangulant un polygone régulier à n côtés, on voit que la somme de ses angles géométriques est $(n-2)\pi$, et donc que chacun de ses angles a pour mesure $(n-2)\pi/n$.

Venons-en à la question du *type*. La proposition qui suit affirme l'unicité du polygone régulier à n côtés *à similitude près*.

Proposition V.5.1. *Pour tout entier $n \geq 3$, il existe un polygone régulier à n côtés. Deux polygones réguliers à n côtés sont semblables.*

Démonstration. L'existence est évidente : on considère l'enveloppe convexe des n points $e^{2ik\pi/n}$ dans $\mathbf{C}$.

Si P et P' sont deux tels polygones, on utilise une similitude pour amener une arête de P' sur une arête de P. Quitte à composer avec une réflexion (similitude aussi), on peut supposer que P et l'image de P' sont du même côté de cette arête. Mais alors, par égalité des angles et des longueurs des côtés, tous les sommets coïncident. □

Une définition des polyèdres réguliers en dimension 3

Je ne cherche pas à donner une définition parfaite et assez générale pour « marcher » en dimension quelconque. De même que la définition donnée pour les polygones réguliers ci-dessus, celle que je donne ici est une définition *ad hoc*. Voir par exemple [**5**] pour une définition plus générale et des informations complémentaires.

Définition V.5.2. On dit qu'un polyèdre convexe de l'espace euclidien de dimension 3 est *régulier* si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si, en chaque sommet, elles s'assemblent de la même façon au sens où les figures formées par la réunion des arêtes aboutissant à un sommet sont isométriques.

Remarques V.5.3

(1) Par analogie avec le cas des losanges en géométrie plane (voire avec le cas du pentagone de Dürer — exercice IV.6), on remarquera qu'il existe des polyèdres convexes dont toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques mais qui ne sont pas réguliers. C'est le cas par exemple du polyèdre obtenu en recollant deux tétraèdres réguliers isométriques le long d'une face (figure 8) : toutes les

[5] Voir toutefois l'exercice V.23.

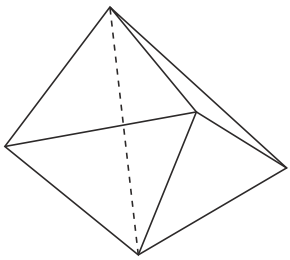


Figure 8. Ceci n'est pas un polyèdre régulier

faces sont des triangles équilatéraux mais il y a des sommets d'où partent trois arêtes et d'autres d'où en partent quatre.

(2) Dans le cas d'un polyèdre régulier, toutes les faces ont le même nombre de sommets et de tout sommet part le même nombre d'arêtes. On est donc limité, combinatoirement, par le corollaire V.4.6 : les faces d'un polyèdre régulier sont des polygones réguliers à s côtés et on en assemble r en chaque sommet.

(3) On peut démontrer cette finitude de façon encore plus élémentaire que par l'utilisation de la formule d'Euler : l'essentiel est que la somme des angles en un sommet soit $< 2\pi$ (toujours la courbure !) — voir l'exercice V.26.

Il se trouve que chaque valeur du couple (r, s) autorisée par le corollaire V.4.6 correspond effectivement à un polyèdre régulier, et que celui-ci est unique à similitude près. On passe d'un polyèdre régulier de type (r, s) à un polyèdre régulier de type (s, r) par une opération de dualité dont on trouvera une description dans l'exercice V.38. Dans le cas des polyèdres réguliers, on peut la décrire de façon très simple : le polyèdre dual $\check{P}$ est l'enveloppe convexe des centres des faces de P. En première lecture, on pourra utiliser cette propriété comme définition du polyèdre dual. Elle n'est pas très satisfaisante en général (voir l'exercice V.41).

Pour chacun de ces couples (r, s), il suffit de montrer :

– Qu'on peut assembler r polygones réguliers isométriques à s côtés en un point suivant des arêtes. Je vais indiquer une construction dans chacun des cas.

– Que la figure obtenue est unique à similitude près. Je vais faire confiance à l'intuition des lecteurs, une démonstration vraiment complète risquant d'être assez fastidieuse.

Assemblage de pentagones : le dodécaèdre

Tout ceci semble bien banal quand on veut assembler trois triangles équilatéraux ($(r, s) = (3, 3)$) ou trois carrés ($(r, s) = (3, 4)$) simplement parce que les objets obtenus (tétraèdre régulier, cube) sont familiers, mais il n'est pas non plus

très difficile d'assembler trois pentagones réguliers ($(r, s) = (3, 5)$) pour ébaucher la construction d'un dodécaèdre. On s'en convaincra en contemplant la figure 9 (qui montre trois pentagones posés sur trois arêtes d'un cube) et en traitant l'exercice V.49.

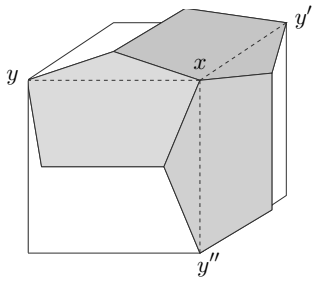


Figure 9

Remarque V.5.4. Précisons comment on termine la construction du dodécaèdre régulier : on part d'un cube et on installe trois pentagones au sommet x comme le montre la figure 9. On utilise ensuite les réflexions par rapport aux hyperplans médiateurs des faces pour finir de construire le dodécaèdre régulier : on démontre que la figure formée par ces trois pentagones est unique à isométrie près (voir l'exercice V.49), ce dont on déduit que le polyèdre est régulier... et ce qui entraîne aussi l'unicité à similitude près.

Pour montrer l'existence de ce polyèdre régulier, on peut aussi donner les coordonnées de vingt points dont on vérifie que leur enveloppe convexe est bien un polyèdre régulier (exercice V.50).

Les cinq polyèdres réguliers

Il y a donc cinq types de polyèdres réguliers[(6)] dans l'espace de dimension 3. Il s'agit

– du tétraèdre régulier (figure 10), formé de quatre triangles équilatéraux, pour lequel $(r, s) = (3, 3)$,

– du cube, formé de six carrés, pour lequel $(r, s) = (3, 4)$ (figure 11),

– de l'octaèdre, formé de huit triangles équilatéraux, pour lequel $(r, s) = (4, 3)$, dont Dürer écrit qu'il est « comme un diamant » et qu'on peut construire comme l'enveloppe convexe des centres des faces d'un cube (voir la figure 11) ou des milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier (voir la figure 16 et l'exercice V.27),

[(6)] Voir les figures de Dürer dans [**18**] ou celle de Léonard de Vinci reproduites dans [**5**].

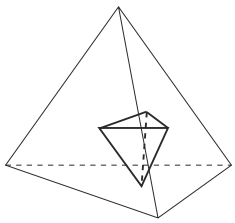


Figure 10. Tétraèdres

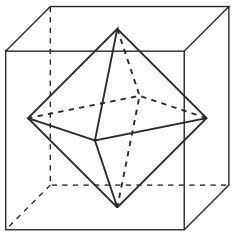


Figure 11. Cube et octaèdre

– du dodécaèdre, formé de douze pentagones réguliers, pour lequel $(r, s) = (3, 5)$ (figure 12),

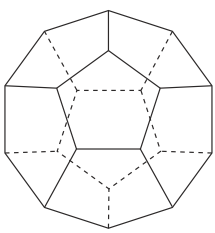


Figure 12. Dodécaèdre

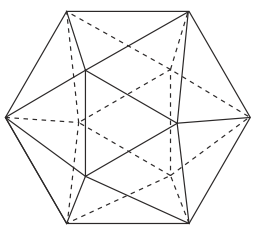


Figure 13. Icosaèdre

– de l'icosaèdre, formé de vingt triangles équilatéraux, pour lequel $(r, s) = (5, 3)$ (figure 13) et qu'on peut construire comme enveloppe convexe des centres des faces du dodécaèdre.

On peut résumer les propriétés combinatoires des polyèdres réguliers dans un tableau. On y a ajouté, à titre d'information, l'ordre n du groupe des déplacements qui préservent le polyèdre (voir les exercices V.29, V.32, V.51 et V.54).

	r	s	S	A	F	n
tétraèdre	3	3	4	6	4	12
cube	3	4	8	12	6	24
octaèdre	4	3	6	12	8	24
dodécaèdre	3	5	20	30	12	60
icosaèdre	5	3	12	30	20	60

Sous-groupes finis de $\mathrm{O}^+(3)$

Chacun des cinq polyèdres réguliers fournit un sous-groupe fini de $\mathrm{O}^+(3)$, le groupe des déplacements qui le préservent.

Remarque V.5.5. Comme les polyèdres convexes sont enveloppes convexes de leurs sommets, l'isobarycentre des sommets d'un polyèdre régulier est centre de symétrie pour ce polyèdre. Il est donc fixé par le groupe des isométries qui préservent le polyèdre. On peut ainsi considérer ce groupe comme un sous-groupe de $\mathrm{O}^+(3)$.

Il est facile de se convaincre (exercice V.39) qu'un polyèdre et son dual ont le même groupe de déplacements. Nous disposons donc ainsi d'une liste de trois *types* de sous-groupes finis.

Il y en a d'autres : si P est un polygone régulier (plan) à n côtés, le groupe des déplacements qui le préservent est isomorphe au groupe diédral à $2n$ éléments, noté ici D_{2n} (voir au besoin l'exercice V.24), lequel contient un groupe cyclique d'ordre n.

On peut effectivement démontrer :

Théorème V.5.6. *À conjugaison près dans* $\mathrm{O}^+(3)$*, il y a cinq types de sous-groupes finis dans* $\mathrm{O}^+(3)$ *:*

– *les groupes de déplacements des polyèdres réguliers (isomorphes au groupe alterné* $\mathfrak{A}_4$ *pour le tétraèdre, au groupe symétrique* $\mathfrak{S}_4$ *pour le cube et l'octaèdre, au groupe alterné* $\mathfrak{A}_5$ *pour le dodécaèdre et l'icosaèdre),*
– *les groupes cycliques d'ordre* n*,*
– *les groupes diédraux d'ordre* $2n$*.*

On trouvera une façon d'arriver à ce résultat (liste des sous-groupes) et des références bibliographiques dans l'exercice V.54, l'identification des groupes des polyèdres réguliers aux groupes alternés et/ou symétriques dans les exercices V.29, V.32 et V.51.

Exercices et problèmes

Espace affine euclidien de dimension 3

***Exercice V.1* (Perpendiculaire commune, rappels).** Si les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas coplanaires, montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Si H_1 et H_2 sont les deux points d'intersection de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, montrer que H_1H_2 est la distance[(7)] entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice V.2. Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites deux à deux non coplanaires. On appelle Δ_1 (resp. Δ_2, Δ_3) la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ (resp. $\mathcal{D}_3$ et

[(7)] C'est-à-dire le minimum des distances $d(A_1, A_2)$ pour des points A_1 et A_2 de D_1 et D_2.

$\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$). Montrer que $\mathcal{D}_1$ est la perpendiculaire commune à Δ_2 et Δ_3 et de même, respectivement, que $\mathcal{D}_2$ (resp. $\mathcal{D}_3$) est la perpendiculaire commune à Δ_3 et Δ_1 (resp. Δ_1 et Δ_2).

Exercice V.3. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non coplanaires et soit $\mathcal{P}$ un plan. Construire un segment de longueur donnée, parallèle à $\mathcal{P}$ et avec ses extrémités sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice V.4. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans non parallèles. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace, dont on suppose que les projetés orthogonaux sur chacun des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des parallélogrammes. Les points A, B, C, D étaient-ils eux-mêmes les sommets d'un parallélogramme ?

Exercice V.5. Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace. Combien y a-t-il de plans $\mathcal{P}$ tels que les distances de A, B, C et D à $\mathcal{P}$ soient égales ?

Isométries

Exercice V.6. Que peut-on dire de l'angle de la rotation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice V.7. Soient f et g deux rotations. Quand l'angle de $g \circ f$ est-il la somme des angles de f et g ?

Exercice V.8. Quelle est la composée de trois réflexions de plans parallèles ?

Exercice V.9. Pour qu'une translation et une rotation commutent, il faut et il suffit que le vecteur de la translation dirige l'axe de la rotation.

Exercice V.10. La composée d'une rotation et d'une translation est, en général, un vissage.

Exercice V.11. Étudier la composition de deux rotations affines.

***Exercice V.12* (Demi-tours).** Soit s_P la réflexion (vectorielle) de plan P. Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour.

Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de trois demi-tours est-elle un demi-tour ?

Montrer que $\mathrm{O}^+(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $\mathrm{O}^+(3)$.

Exercice V.13. Décrire la composée de trois réflexions de plans orthogonaux deux à deux.

Exercice V.14. Montrer que la donnée d'un vissage permet (en général) de définir une orientation de l'espace[8] (quelles sont les exceptions ?).

Exercice V.15. Soient u_1, u_2, v_1 et v_2 des vecteurs unitaires tels que $\|u_1 - u_2\| = \|v_1 - v_2\|$. Montrer qu'il existe une rotation f telle que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.

Exercice V.16. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Rappelons que ses arêtes opposées sont orthogonales (voir l'exercice V.27 si nécessaire). On considère la composition

$$s_{AD} \circ s_{AC} \circ s_{AB}$$

des trois demi-tours autour des arêtes issues de A.

(1) Montrer que r est une rotation dont l'axe passe par A. Dans le plan BCD, on trace la parallèle à BC passant par D, la parallèle à CD passant par B et la parallèle à DB passant par C. On trouve ainsi un triangle $B'C'D'$ ($B'C'$ est parallèle à BC, *etc.*). Déterminer $r(C')$. Quel est l'axe de la rotation r ?

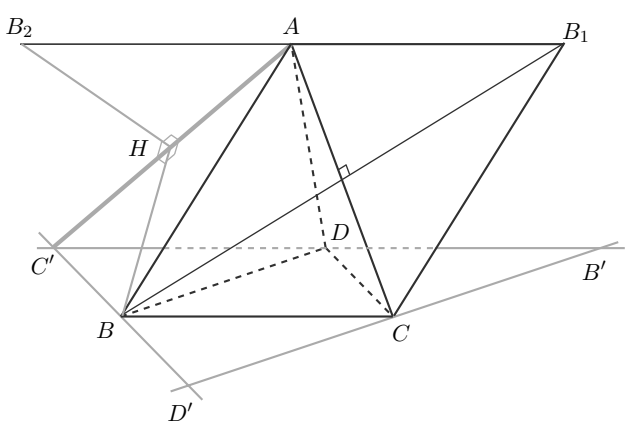


Figure 14

(2) On pose $B_1 = s_{AC}(B)$ et $B_2 = s_{AD}(B_1)$. Montrer que $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BC}$, puis que AB_1 et AD sont orthogonales. Montrer que le triangle ABB_2 est équilatéral.

[8] Si l'humanité était constituée uniquement de droitiers (ou de gauchers), on pourrait donc considérer que le tire-bouchon détermine une orientation naturelle (pour l'espèce humaine) de notre espace.

(3) Montrer que le triangle $BC'A$ est isocèle rectangle (en B). Soit H le projeté orthogonal de B sur AC'. Vérifier que H est le milieu de AC'. Calculer les longueurs HB et HB_2. En déduire que HB_2 est orthogonale à HB.

(4) Que peut-on dire de l'angle de la rotation r ?

***Exercice V.17* (Simplicité de $\mathrm{O}^+(3)$).** On veut montrer que $\mathrm{O}^+(3)$ est simple, c'est-à-dire que ses seuls sous-groupes distingués sont les sous-groupes triviaux $\mathrm{O}^+(3)$ et $\{\mathrm{Id}\}$. Soit donc N un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}^+(3)$. On suppose $N \neq \{\mathrm{Id}\}$ et on veut montrer que $N = \mathrm{O}^+(3)$.

(1) Vérifier qu'il suffit de démontrer que N contient *un* demi-tour (voir l'exercice V.12).

(2) Montrer qu'on peut supposer que N contient une rotation f d'angle $\theta \in]0, \pi[$. Soient a un vecteur unitaire dirigeant l'axe de f, x un vecteur unitaire orthogonal à a et $y = f(x)$ son image par f. On appelle $d = \|x - y\|$ la distance de x à y. Montrer que, pour tout nombre réel $m \in [0, d]$, il existe un vecteur unitaire x_1 tel que $x_2 = f(x_1)$ soit à distance m de x_1.

(3) Fixons $m \in [0, d]$. Soient y_1 et y_2 deux vecteurs unitaires tels que $\|y_1 - y_2\| = m$. Montrer qu'il existe une rotation f' dans N telle que $f'(y_1) = y_2$ (voir l'exercice V.15).

(4) Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier et soit ρ_n la rotation d'axe a et d'angle π/n. On suppose que n est assez grand pour que[9] $\|x - \rho_n(x)\| \leq d$. Soient

$$x_0 = x, \quad x_1 = \rho_n(x), \dots \quad x_{i+1} = \rho_n(x_i), \dots$$

Que vaut x_n ? Montrer qu'il existe une rotation u_i dans N telle que $u_i(x_i) = x_{i+1}$. Soit $v = u_{n-1} \circ \cdots \circ u_1$. Que vaut $v(x)$? Montrer que v est un demi-tour. Conclure[10].

Produit vectoriel

***Exercice V.18* (Double produit vectoriel).** Dans un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3, montrer que, pour tous les vecteurs u, v et w, on a

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$$

Le produit vectoriel est-il associatif ?

---

[9] Cette démonstration utilise le fait que la suite $1/n$ tend vers 0... en d'autres termes le fait que $\mathbf{R}$ est archimédien. Voir [**5**] ou l'exercice VI.6.2 de [**39**] à propos de cette remarque.

[10] Quand n est pair, le groupe $\mathrm{O}^+(n)$ a un centre non trivial $\{\pm \mathrm{Id}\}$. On peut montrer que le quotient $\mathrm{PO}^+(n)$ de $\mathrm{O}^+(n)$ par son centre est simple pour $n \geq 5$. En utilisant les quaternions (exercice V.55), on peut montrer qu'en revanche $\mathrm{PO}^+(4)$ n'est pas simple. Voir [**39**].

Exercice V.19. Dans un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3), montrer que

$$(u \wedge v) \cdot w = \text{dét}_{(e_1,e_2,e_3)}(u, v, w)$$

et que ce nombre est le volume (orienté) du parallélépipède construit sur les trois vecteurs u, v et w.

Exercice V.20. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des trois côtés BC, CA et AB d'un triangle et soit G son centre de gravité. Montrer que les six petits triangles tels que $AB'G$ ont même aire (figure 15).

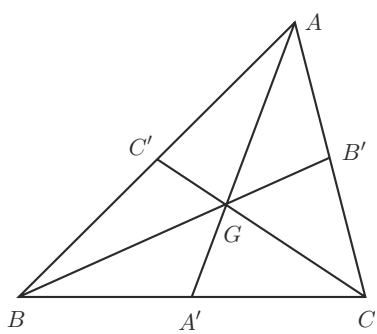


Figure 15

Exercice V.21. Soit P un point du côté BC d'un triangle ABC. Construire une droite passant par P et partageant le triangle en deux triangles de même aire.

Exercice V.22. Soit ABC un triangle. Déterminer un système de coordonnées barycentriques du centre I de son cercle inscrit.

Polyèdres

Exercice V.23. On considère un polygone inscrit dans un cercle. Montrer que

– si tous ses côtés sont égaux, il est régulier,

– si tous ses angles sont égaux et si le nombre de ses côtés est impair, il est régulier.

Le pentagone de Dürer (exercice IV.6) est-il inscriptible ?

Exercice V.24. Soit P un polygone régulier à n côtés dans un plan affine euclidien. Montrer que le groupe des déplacements du plan qui préservent P est isomorphe

au groupe cyclique d'ordre n, que le groupe des isométries du plan qui préservent P est isomorphe au groupe diédral[11] D_{2n} d'ordre $2n$.

On considère maintenant que $\mathcal{P}$ est un plan d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. Montrer que le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$ qui préservent le polygone P est isomorphe au groupe diédral D_{2n}.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ hors de $\mathcal{P}$ qui se projette sur le centre de P dans $\mathcal{P}$. On considère la pyramide de sommet M construite sur le polygone P (si $n = 3$, on choisit M de façon que cette pyramide ne soit pas un tétraèdre régulier). Montrer que le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$ qui la préservent est isomorphe au groupe cyclique d'ordre n.

Exercice V.25. Un tétraèdre est tel que les centres de ses sphères inscrite et circonscrites coïncident. Montrer que ses faces sont des triangles isométriques.

Exercice V.26 **(Finitude du nombre de types de polyèdres réguliers — sans la formule d'Euler)**

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}$$

(de la démonstration du corollaire V.4.6) qui donne la finitude du nombre de valeurs de r et s possibles pour un polyèdre régulier, en remplaçant la formule d'Euler par un argument (encore plus) élémentaire.

(1) Soient A, B et C trois points non alignés dans l'espace et P un plan contenant la droite BC. On appelle a le projeté orthogonal de A sur P. En comparant les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{aB} \cdot \overrightarrow{aC}$, montrer que

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \geq \cos(\overrightarrow{aB}, \overrightarrow{aC})$$

(la projection dilate les angles) et étudier le cas d'égalité.

(2) On considère maintenant un polyèdre régulier dont les faces sont des polygones réguliers à s côtés et tel qu'en chaque sommet arrivent r arêtes. Montrer que

$$r\left(\frac{s-2}{s}\pi\right) < 2\pi$$

et en déduire le résultat espéré.

Exercice V.27 **(Tétraèdre régulier).** Montrer que, dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leurs milieux.

[11] Ceci peut être considéré, en cas de besoin, comme une *définition* de D_{2n}.

Montrer que la figure formée par les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier est un octaèdre régulier (figure 16).

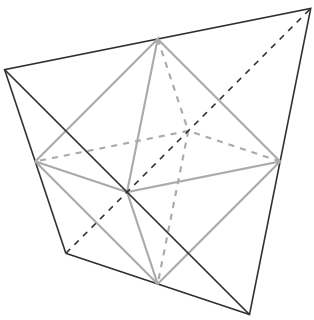


Figure 16

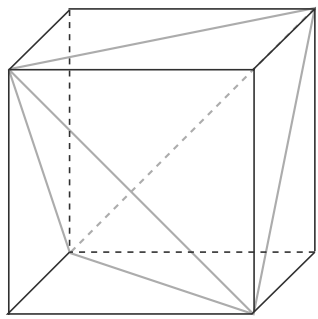


Figure 17

***Exercice V.28* (Tétraèdre et cube).** Montrer que les diagonales des faces d'un cube forment deux tétraèdres réguliers (l'un d'entre eux est représenté sur la figure 17). Étant donnée une isométrie qui préserve le cube, quel est son effet sur un des ces tétraèdres ?

Montrer que le groupe des isométries (resp. des déplacements) qui préservent un tétraèdre régulier est un sous-groupe d'indice 2 du groupe des isométries (resp. des déplacements) qui préservent un cube.

***Exercice V.29* (Isométries préservant un tétraèdre).** Soit G le groupe de toutes les isométries qui préservent un tétraèdre régulier $ABCD$. Montrer qu'une isométrie préservant le tétraèdre $ABCD$ préserve l'ensemble des quatre points $\{A, B, C, D\}$. En déduire qu'il existe un homomorphisme

$$G \longrightarrow \mathfrak{S}_4$$

du groupe G dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Trouver une isométrie qui fixe A et B et échange C et D. En déduire que le groupe des isométries qui préservent un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice V.30. Soit $ABCD$ un tétraèdre quelconque. Déterminer le groupe de toutes les applications affines qui le préservent. Quel est le groupe des isométries qui le préservent ? Soit G un sous-groupe d'ordre 3 du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$. Construire un tétraèdre dont le groupe des déplacements soit isomorphe à G. Quel est son groupe d'isométries[12] ?

[12] Ce qui montre, comme on pouvait l'espérer, que « plus le tétraèdre est régulier, plus son groupe d'isométries est gros ».

Exercice V.31. Reprendre l'exercice I.26. Montrer que si $ABCD$ est un tétraèdre régulier, alors toutes les transformations affines qui le préservent sont des isométries.

***Exercice V.32* (Déplacements préservant un cube).** En utilisant les exercices V.27 et V.29, montrer que le groupe des déplacements qui préservent un cube a vingt-quatre éléments. Faire une liste de tous ces déplacements.

Montrer qu'un déplacement qui préserve un cube transforme une grande diagonale en une grande diagonale. En déduire un homomorphisme du groupe des déplacements du cube dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Montrer que c'est un isomorphisme.

***Exercice V.33* (De $\mathfrak{S}_4$ à $\mathfrak{S}_3$).** On considère le groupe $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe des isométries d'un tétraèdre régulier (exercice V.29). Montrer qu'il envoie la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées sur la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées. En déduire qu'il existe un homomorphisme surjectif

$$\mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_3.$$

Montrer que son noyau est le sous-groupe V formé de l'identité et des produits de deux transpositions à supports disjoints (voir aussi l'exercice VI.27). Pensez-vous qu'en général il existe un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_{n-1}$?

***Exercice V.34* (Projection stéréographique).** Soient $\mathcal{S}$ une sphère de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan passant par le centre O de $\mathcal{S}$. Soit N (le pôle nord) un des deux points de $\mathcal{S}$ tels que $ON \perp \mathcal{P}$.

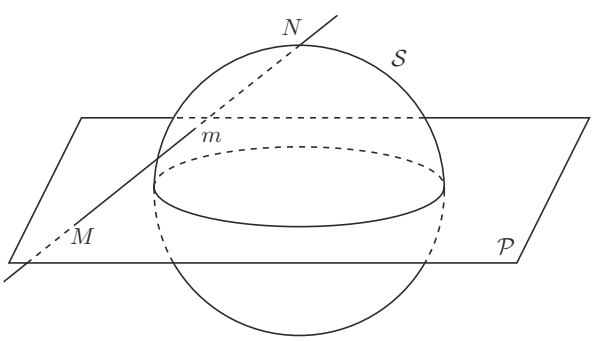


Figure 18

On définit la *projection stéréographique* $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{S} - \{N\}$ comme l'application qui, à un point M du plan, associe le point m où la droite NM rencontre la sphère $\mathcal{S}$ (figure 18). Montrer que φ est la restriction à $\mathcal{P}$ de l'inversion de pôle

N et de puissance $2R^2$ et que φ est un homéomorphisme. Soient m' le symétrique de m par rapport à $\mathcal{P}$ et $M' = \varphi^{-1}(m')$. Montrer que M' est l'image de M par l'inversion de cercle $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$.

On trouvera une suite à cet exercice dans l'exercice V.52.

***Exercice V.35* (Géographie).** On considère que la Terre est une sphère $\mathcal{S}$ munie d'un axe ou, ce qui revient au même, de deux points diamétralement opposés N et S, ses pôles. Les grands cercles passant par N et S sont les *méridiens*, les intersections des plans orthogonaux à l'axe NS avec $\mathcal{S}$ sont les (cercles) *parallèles*. Quelles sont les images des méridiens et des parallèles par la projection stéréographique[13] de pôle N ? Montrer que, sur une carte réalisée par projection stéréographique, les angles sont exacts, mais pas les rapports des distances[14].

***Exercice V.36* (Latitude et longitude).** La latitude d'un point M de la Terre est la mesure dans $[-\pi/2, \pi/2]$ de l'angle $(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$, où O est le centre de la Terre, toujours supposée sphérique, m est la projection de M sur le plan équatorial et le plan contenant O, M et N est orienté[15] par la base $(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{ON})$.

Êtes-vous capables de définir la *longitude* sans autre choix ? Ne pas hésiter à relire **[26]** (par exemple) pour mesurer les conséquences d'une réponse trop hâtive à cette question.

De l'Île mystérieuse... Dans **[57]**, arrivé sur une île inconnue, Gédéon Spilett prend bien soin de ne pas laisser sa montre s'arrêter, afin de pouvoir connaître sa longitude. Expliquer pourquoi.

... au Pays des fourrures. Que pensez-vous de la façon dont les héros de **[56]** font le point ?

> À deux heures du soir, le lieutenant Hobson et Thomas Black relevèrent au sextant l'élévation du soleil au dessus de l'horizon. Le lendemain, ils comptaient, vers dix heures du matin, recommencer la même opération, afin de déduire des deux hauteurs la longitude du point alors occupé par l'île sur l'océan polaire.

***Exercice V.37* (Séparation).** Soit C un convexe compact d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et soit A un point hors de C. Montrer que la fonction qui, à tout point M

[13] Les lectrices devraient profiter de l'occasion pour aller contempler une carte de l'Antarctique dans un bel atlas, par exemple **[20]**.

[14] En vertu de l'exercice V.48, c'est impossible de toute façon.

[15] De même que les autres plans de l'espace, celui-ci n'a pas d'orientation meilleure que les autres ; il y a un choix géopolitique ici.

de C, associe la distance de A à M a un minimum sur C, atteint en un point M_0. Soit $d = AM_0$. Pourquoi a-t-on $d > 0$? Soit Q l'hyperplan défini par

$$Q = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM_0} = \frac{d^2}{2} \right\}.$$

Montrer que A est dans l'un des demi-espaces ouverts définis par Q et que C est dans l'autre[16].

***Exercice V.38* (Dual d'un convexe).** On se place dans un espace vectoriel euclidien E (muni de sa structure affine canonique). Si $C \subset E$ est un convexe, on définit son *dual* $\check{C}$ par

$$\check{C} = \{u \in E \mid u \cdot v \leq 1 \text{ pour tout } v \text{ de } C\}.$$

Vérifier que $\check{C}$ est convexe. Montrer que si 0 est dans l'intérieur de C, alors $\check{C}$ est borné. On suppose que 0 est dans l'intérieur de C et que C est compact. Montrer que C est le dual de $\check{C}$. Soit P un polyèdre convexe contenant 0 dans son intérieur. Montrer que $\check{P}$ est un polyèdre convexe.

***Exercice V.39*.** Montrer que le convexe compact C contenant 0 dans son intérieur et son dual $\check{C}$ défini dans l'exercice V.38 ont même groupe d'isométries.

***Exercice V.40*.** Soit P un polyèdre régulier de centre O. Soient $A_1, \ldots, A_s$ les sommets d'une face de P et M le centre du polygone régulier $A_1, \ldots, A_s$. Montrer que la droite OM est orthogonale à la face $A_1, \ldots, A_s$.

Soit P' l'enveloppe convexe des centres des faces de P. Montrer que le convexe dual de P' est un homothétique de P.

***Exercice V.41*.** Que peut-on dire de la figure formée par les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe plan ? Pensez-vous que le résultat de l'exercice V.40 puisse être vrai pour n'importe quel polyèdre ?

***Exercice V.42* (Salle de bains).** Peut-on carreler une salle de bains sphérique avec des tomettes hexagonales (on ne suppose ni qu'elles sont toutes identiques, ni qu'elles sont toutes régulières, ni qu'elles sont assemblées par trois en chaque sommet) ?

Une variante : expliquer pourquoi on n'utilise pas *que* des morceaux de cuir hexagonaux pour fabriquer un ballon de football[17].

---

[16] On dit que Q *sépare* le point A et le convexe C. On trouvera des résultats de séparation beaucoup plus forts, comme le théorème de Hahn-Banach, dans [**5**].

[17] Ceux de nos lecteurs qui n'auraient jamais vu de ballon de football sont invités à contempler celui qu'a dessiné Léonard de Vinci et qui est reproduit dans le chapitre 12 de [**5**]. D'autres

***Exercice V.43* (Ballon de football).** On assemble des pentagones et des hexagones réguliers (de même côté) de telle sorte qu'il y ait trois polygones assemblés en chaque sommet et que le résultat de l'assemblage soit un polyèdre convexe. Combien faut-il de pentagones ?

Exercices un peu plus théoriques

Exercice V.44. On « triangule » un polygone convexe plan, c'est-à-dire qu'on le recouvre par des triangles qui s'intersectent le long d'arêtes (l'intersection de deux triangles est une arête). On appelle S le nombre de sommets des triangles de la triangulation, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Montrer que

$$F - A + S = 1.$$

***Exercice V.45* (Distance intrinsèque sur la sphère).** Soient x et y deux vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3, considérés comme deux points de la sphère unité S. On pose

$$d(x, y) = \arccos(x \cdot y)$$

(c'est l'angle des deux vecteurs x et y).

(1) Montrer que, si x, y et z sont trois points de S et si α est l'angle en x du triangle xyz, $a = d(y, z)$, $b = d(z, x)$ et $c = d(x, y)$ sont les longueurs des trois côtés, alors

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

(2) En déduire que d est une distance sur S.

(3) Vérifier que d définit sur S la même topologie que celle qu'y induit la topologie d'espace normé de E.

(4) Montrer que si $y \neq -x$, il y a un unique plus court chemin par lignes brisées de x à y, qui est l'unique arc de grand cercle joignant x à y.

***Exercice V.46* (Isométries de la sphère).** Avec les notations de l'exercice V.45, soit $\varphi : S \to S$ une isométrie pour d. Montrer que φ est la restriction à S d'une isométrie de l'espace euclidien E. En déduire que le groupe des isométries de (S, d) est isomorphe à $\mathrm{O}(E)$ (on pourra utiliser l'exercice II.3).

***Exercice V.47* (Triangles sphériques, suite).** Si a, b et c sont trois nombres réels dans $]0, \pi[$ vérifiant

$$|b - c| < a < b + c \quad \text{et} \quad a + b + c < 2\pi,$$

polyèdres qui ont l'air d'avoir toutes leurs faces hexagonales apparaissent dans la nature : voir les curieuses constructions reproduites dans [**58**].

montrer qu'il existe un triangle sphérique de côtés a, b et c, unique à isométrie près. Pour tout nombre réel α dans $]\pi/3, \pi[$, montrer qu'il existe un triangle équilatéral dont α est une mesure de l'angle au sommet.

Exercice V.48. Soit U un ouvert non vide de la sphère unité S. Montrer qu'il n'existe aucune application $f : U \to \mathbf{R}^2$ qui préserve les distances au sens où

$$\|f(x) - f(y)\| = d(x, y).$$

La raison profonde invoquée ici est que la sphère est courbe et pas le plan (voir le théorème IX.3.10).

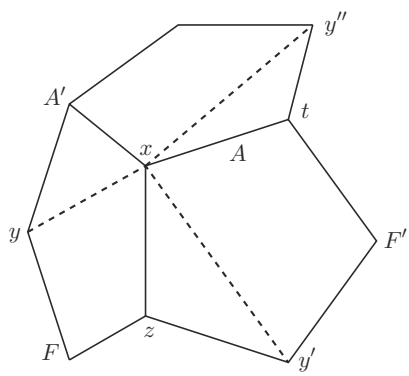


Figure 19. Construction du dodécaèdre

***Exercice V.49* (Construction du dodécaèdre).** Soient F, F' et F'' trois pentagones réguliers isométriques. Montrer qu'on peut les recoller suivant des arêtes A (commune à F' et F''), A' (commune à F'' et F) et A'' (commune à F et F') en un sommet x et que la figure obtenue est unique à isométrie près. On pourra montrer qu'il existe un triangle sphérique équilatéral dont la longueur des côtés est $3\pi/5$ et qu'il n'y en a qu'un à isométrie près, puis démontrer l'existence du recollement à isométrie près en plaçant x', z et t aux trois sommets d'un triangle équilatéral de côté $3\pi/5$. En utilisant le fait que yz est parallèle à A' et que zt lui est orthogonale, montrer que $yz \perp zt$. Utiliser ensuite la symétrie par rapport au plan médiateur de A'' pour montrer que $xy \perp xy'$; avec les notations de la figure 19, en déduire que les droites xy, xy' et xy'' sont trois arêtes d'un cube.

***Exercice V.50* (Une autre construction du dodécaèdre).** On désigne par τ le nombre $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'enveloppe convexe des points dont les

coordonnées dans un repère orthonormé sont $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$, $(\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1})$, $(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$ est un dodécaèdre régulier.

***Exercice V.51* (Déplacements du dodécaèdre).** En contemplant la figure 9, découvrir cinq cubes dans un dodécaèdre. Montrer que le groupe des déplacements qui préservent un dodécaèdre est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

***Exercice V.52* (Projection stéréographique, suite).** On utilise les mêmes notations que dans l'exercice V.34. On ajoute un point, noté ∞, au plan $\mathcal{P}$ et on munit $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ de la topologie pour laquelle une base de voisinages de ∞ est formée des complémentaires des compacts de $\mathcal{P}$ et la topologie induite sur $\mathcal{P}$ est sa topologie usuelle. Montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un espace topologique compact. On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le *compactifié d'Alexandrov* de $\mathcal{P}$ (voir par exemple [**7**]). Montrer que φ se prolonge en un homéomorphisme

$$\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

Quelle est l'image d'un cercle par φ ? l'image d'une droite ? Que pensez-vous du théorème III.4.17 et de la discussion[18] qui le suit ?

***Exercice V.53* (Sous-groupes de $\mathrm{O}(3)$).** Soit $G \subset \mathrm{O}(3)$ un sous-groupe et soit G^+ le sous-groupe $G \cap \mathrm{O}^+(3)$. On suppose que G contient $-\mathrm{Id}$. Montrer que G est isomorphe au groupe produit $G^+ \times \{\pm 1\}$.

Pourquoi le groupe des isométries qui préservent le dodécaèdre n'est-il pas isomorphe à $\mathfrak{S}_5$?

***Exercice V.54* (Sous-groupes finis de $\mathrm{O}^+(3)$).** Soit G un sous-groupe d'ordre n de $\mathrm{O}^+(3)$. On suppose que G n'est pas réduit à l'identité (en formules, $n > 1$). Il opère sur la sphère unité S de $\mathbf{R}^3$. On considère

$$\Gamma = \{(g, x) \in (G - \{\mathrm{Id}\}) \times S \mid g(x) = x\}$$

avec ses deux projections sur S et $G - \{\mathrm{Id}\}$. Soit X son image dans S.

(1) Caractériser géométriquement les éléments de X et vérifier que G stabilise X. On appelle $P_1, \ldots, P_k$ les orbites de cette opération et e_i l'ordre du stabilisateur de x quand $x \in P_i$.

Combien y a-t-il de rotations dans G qui ont le vecteur x de P_i comme point fixe ? En calculant le cardinal de Γ de deux façons différentes, montrer que

$$2(n-1) = n \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right)$$

[18] Voir aussi le chapitre VI et notamment son § VI.7, ainsi que le § VII.6.

(un cas particulier de la *formule des classes*).

(2) En déduire que $k = 2$ ou 3. Montrer que, si $k = 2$, G est un groupe cyclique d'ordre n.

(3) On suppose maintenant que $k = 3$. Montrer que, à l'ordre près des e_i, (n, e_1, e_2, e_3) est de la forme

$$\begin{array}{ll} & (2p, 2, 2, p) \\ \text{ou} & (12, 2, 3, 3) \\ \text{ou} & (24, 2, 3, 4) \\ \text{ou} & (60, 2, 3, 5). \end{array}$$

(4) On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (2p, 2, 2, p)$. Montrer que le stabilisateur des points de l'orbite P_3 est un groupe cyclique d'ordre p. En déduire que G est le groupe de tous les déplacements qui préservent un polygone plan régulier à p côtés et que c'est un groupe diédral D_{2p} d'ordre $2p$.

(5) On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (12, 2, 3, 3)$. Combien l'orbite P_2 a-t-elle d'éléments ? Montrer que ces points forment un tétraèdre régulier (on pourra utiliser l'exercice V.30). Conclure que G est le groupe des déplacements qui préservent un tétraèdre régulier. Que peut-on dire de l'orbite P_3 ?

(6) On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (24, 2, 3, 4)$. Montrer de même que les points de P_2 forment un cube et que G est le groupe des déplacements qui préservent ce cube. Quelle est la figure formée par les points de l'orbite P_3 ?

(7) On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (60, 2, 3, 5)$. Montrer que les points de l'orbite P_2 sont les sommets d'un dodécaèdre régulier (c'est nettement plus délicat ici) et que G est le groupe des déplacements qui préservent ce polyèdre. Que peut-on dire des points de l'orbite P_3 ?

***Exercice V.55* (Quaternions).** On considère, sur l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^4$, muni d'une base orthonormée notée $(1, i, j, k)$, la structure d'algèbre définie par

- 1 est l'élément neutre
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$
- $ij + ji = 0$, $jk + kj = 0$, $ki + ik = 0$.

On appelle $\mathbf{H}$ l'algèbre ainsi définie. Si $q \in \mathbf{H}$,

$$q = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k,$$

avec a, b, c et $d \in \mathbf{R}$, on définit son conjugué $\overline{q}$ par

$$\overline{q} = a \cdot 1 - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k$$

et sa *norme* $N(q)$ par $N(q) = q\overline{q}$.

(1) Montrer qu'on a $\overline{qq'} = \overline{q'}\,\overline{q}$

(2) Montrer que $\mathbf{H}$ est un corps (non commutatif), le corps des *quaternions* et que le sous-espace engendré par 1 en est un sous-corps isomorphe à $\mathbf{R}$ (si $a \in \mathbf{R}$, on écrira donc a pour $a1$). Quel est le centre de $\mathbf{H}$?

(3) On appelle *partie réelle* d'un quaternion $q \in \mathbf{H}$ (notation $\text{Ré}(q)$) sa composante sur le vecteur 1. Interpréter $\text{Ré}(q\overline{q'})$. Montrer que

$$S = \{q \in \mathbf{H} \mid N(q) = 1\}$$

est la sphère unité de $\mathbf{R}^4$ et un sous-groupe du groupe multiplicatif de $\mathbf{H}$. Montrer que $\text{Ré}(sq\overline{s}) = N(s)\,\text{Ré}(q)$.

(4) Soit $Q \subset \mathbf{H}$ le sous-espace engendré par i, j et k (quaternions *purs*). Montrer que, si $s \in S$ et $q \in Q$, $sqs^{-1} \in Q$ et que S opère ainsi par *isométries* sur Q.

(5) En déduire un homomorphisme de S dans $\mathrm{O}^+(3)$. Montrer que son noyau est le groupe $\{\pm\,\mathrm{Id}\}$. Soit s un quaternion à la fois pur et unitaire ($s \in S \cap Q$). Montrer que s opère sur Q comme le demi-tour d'axe s. En déduire que $\mathrm{O}^+(3)$ est isomorphe (comme groupe) et homéomorphe (comme espace topologique)[19] à $S/\{\pm 1\}$.

[19] On a vu au § II.3 que $\mathrm{O}^+(2)$ est isomorphe, comme groupe et comme espace topologique, à un cercle. Cet exercice donne donc une propriété analogue de $\mathrm{O}^+(3)$.

VI

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

La géométrie projective est, à l'origine, une complétion de la géométrie affine dans laquelle il n'y a plus de parallèles, ce qui est bien agréable, ne serait-ce que parce que les énoncés des théorèmes sont plus nets. Il y a un prix à payer, c'est un peu d'abstraction pour définir le nouveau cadre, mais ça en vaut la peine !

On peut penser à un plan projectif comme à un plan affine auquel on a ajouté une « droite à l'infini », les parallèles se coupant sur cette droite. C'est ce que je veux expliquer dans ce chapitre. Cette idée vient, bien sûr, de la perspective (les lignes de fuite se coupant sur la ligne d'horizon, voir la photographie reproduite sur la figure 20 dans l'exercice VI.26). On concevra donc sans mal qu'elle ait un lien avec la représentation plane d'un espace de dimension 3. Une magnifique référence est le livre de géométrie de Dürer [**18**], désormais facilement accessible.

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels, affines et projectifs sont définis sur un corps $\mathbf{K}$ dont les lectrices peuvent imaginer que c'est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

De bonnes références bibliographiques pour ce chapitre (et pour la partie projective du suivant) sont [**46, 5, 49**].

VI.1. Espaces projectifs

Si E est un espace vectoriel (que je supposerai toujours de dimension finie), l'*espace projectif* $P(E)$ déduit de E est l'ensemble des droites vectorielles de E, en d'autres termes l'ensemble des classes d'équivalence de $E - \{0\}$ sous la relation d'équivalence de colinéarité :

$$v \sim w \text{ si et seulement si } v = \lambda w \text{ pour un certain scalaire non nul } \lambda.$$

La *dimension* de $P(E)$ est $\dim E - 1$ (c'est une définition). Si E est réduit à 0, il ne contient aucune droite vectorielle et $P(E)$ est vide. On supposera donc en

général implicitement que $\dim E \geq 1$. Si $\dim E = 1$, E est une droite vectorielle, donc l'ensemble de ses droites vectorielles est réduit à un élément, $P(E)$ est un point. Si E est un plan vectoriel, $P(E)$ est une *droite projective*, si $\dim E = 3$, $P(E)$ est un *plan projectif*.

On notera $\mathbf{P}_n(\mathbf{K}) = P(\mathbf{K}^{n+1})$ (ou simplement $\mathbf{P}_n$) l'espace projectif standard de dimension n.

Topologie

Ce qu'on a défini pour l'instant est un ensemble. Si le corps $\mathbf{K}$ sur lequel l'espace vectoriel E est défini est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'espace $P(E)$ est aussi un espace *topologique*. L'espace E (et sa partie $E - \{0\}$) ont une topologie naturelle et $P(E)$ récupère la *topologie quotient*, une notion finalement assez simple, comme on va le voir dans la démonstration qui suit. Elle est faite pour que la projection

$$p : E - \{0\} \longrightarrow P(E)$$

soit continue. Ici, comme la relation d'équivalence est définie comme celle dont les classes sont les orbites de l'opération du groupe $\mathbf{K}^\star$, cette projection est aussi une application ouverte.

Proposition VI.1.1. *Les espaces projectifs réels ou complexes (de dimension finie) sont des espaces topologiques compacts et connexes par arcs.*

La démonstration dans le cas complexe fait l'objet de l'exercice VI.8.

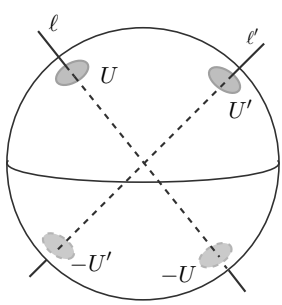


Figure 1

Démonstration dans le cas réel. Munissons l'espace vectoriel réel E d'une structure euclidienne. Appelons $S(E)$ la sphère unité de E. Rappelons que, comme E est de dimension finie, la sphère unité est compacte (il est évident qu'elle est fermée et bornée).

Chaque droite vectorielle réelle possède deux vecteurs unitaires, de sorte que $P(E)$ est le quotient de la sphère unité de E par la relation d'équivalence qui identifie u et $-u$. Ainsi, $P(E)$ est le quotient d'un espace compact, ou si l'on préfère, l'image de l'espace topologique compact $S(E)$ par l'application de passage au quotient... et, je l'ai déjà dit, par définition de la topologie quotient, la projection est continue. Bref, $P(E)$ est l'image d'un compact par une application continue.

Pour montrer qu'il est compact, il reste à s'assurer qu'il est séparé. Choisissons deux points (distincts) de $P(E)$, c'est-à-dire deux droites vectorielles ℓ et ℓ' de E. Soient v et v' des vecteurs unitaires de ces droites. Comme la sphère $S(E)$ est un espace séparé, il existe des ouverts U et U' sur cette sphère qui vérifient :

- U contient v,
- U' contient v',
- U, $-U$, U', $-U'$ sont disjoints (figure 1).

Alors les images de U et U' sont des ouverts (la projection p est ouverte, je l'ai dit aussi) de $P(E)$, voisinages respectifs de ℓ et ℓ', et ils sont disjoints.

La sphère $S(E)$ est connexe par arcs dès que la dimension de E est au moins 2, donc les espaces projectifs de dimension strictement positive sont connexes par arcs. La sphère unité d'une droite vectorielle réelle est composée de deux points, mais les deux sont identifiés dans l'espace projectif associé, qui est réduit à un point, donc connexe par arcs lui aussi. □

VI.2. Sous-espaces projectifs

Une partie V de $P(E)$ est un *sous-espace projectif* si elle est l'image d'un sous-espace vectoriel non nul F de E. Elle est alors l'ensemble des droites vectorielles de E qui sont contenues dans F... c'est-à-dire l'ensemble des droites vectorielles de F, bref, on a

$$V = P(F) \subset P(E).$$

On a ainsi une bijection entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension $k+1$ et l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension k de $P(E)$.

Comme je l'ai annoncé au début de ce chapitre, on est ici dans une géométrie sans parallèles, et voici pourquoi :

Proposition VI.2.1. *Soient V et W deux sous-espaces projectifs de $P(E)$.*

(1) *Si leurs dimensions vérifient l'inégalité*

$$\dim V + \dim W \geq \dim P(E),$$

alors leur intersection $V \cap W$ n'est pas vide. En particulier, deux droites d'un plan se coupent toujours.

(2) *Soit H un hyperplan projectif de $P(E)$ et soit m un point hors de H. Toute droite passant par m coupe H en un point et un seul.*

Remarque VI.2.2. Les débutants en géométrie projective sont souvent désemparés au moment de passer à l'action et de *démontrer* un résultat comme celui-ci. La difficulté vient sans doute du fait que l'espace projectif est défini par un passage au quotient, une opération pas si banale que ça !

Mais un énoncé tel que VI.2.1 ne fait appel qu'à des propriétés d'incidence. Il est donc forcément la traduction, dans le langage nouveau (et peut-être déroutant) de la géométrie projective, d'un énoncé très simple d'algèbre linéaire. La seule difficulté est de faire cette traduction. La morale de la démonstration qui suit (et surtout, la leçon méthodologique à en tirer) est : traduire en termes vectoriels — l'algèbre linéaire, c'est facile !

Démonstration. Pour traduire l'énoncé en termes vectoriels, nommons F et G les deux sous-espaces de E dont V et W sont déduits : $V = P(F)$, $W = P(G)$. L'hypothèse de dimension se traduit, au niveau vectoriel, par :

$$(\dim F - 1) + (\dim G - 1) \geq (\dim E - 1),$$

c'est-à-dire

$$\dim F + \dim G \geq \dim E + 1.$$

Maintenant que la traduction est faite, on utilise la propriété d'algèbre linéaire *ad hoc*, c'est-à-dire

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G) \leq \dim E + \dim(F \cap G)$$

et on en déduit que $\dim(F \cap G) \geq 1$. Il y a donc une droite vectorielle dans $F \cap G$. C'est la conclusion dans le cadre vectoriel, il reste à la retraduire en projectif : $V \cap W$ n'est pas vide.

Passons à la deuxième propriété. L'hyperplan projectif H est l'image d'un hyperplan vectoriel F de E. Le point m est l'image d'une droite vectorielle ℓ de E. Traduisons l'hypothèse que m n'est pas dans H : la droite ℓ n'est pas contenue dans l'hyperplan F. On s'intéresse maintenant aux droites projectives passant par le point m, c'est-à-dire aux plans vectoriels contenant la droite ℓ. L'assertion à démontrer, dite en vectoriel, est que, si ℓ n'est pas contenue dans F, tout plan contenant ℓ rencontre F le long d'une unique droite (figure 2). Et en effet, comme ℓ n'est pas contenue dans F, pour tout plan P contenant ℓ, on a $P + F = E$ et

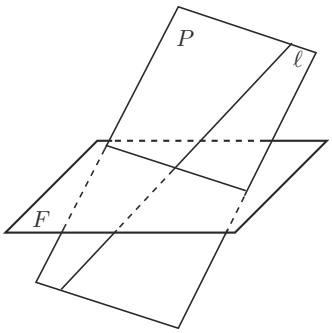


Figure 2

donc

$$\dim(P \cap F) = \dim P + \dim F - \dim(P + F) = 2 + \dim E - 1 - \dim E = 1,$$

ce que nous voulions démontrer. □

On peut définir, comme dans les cas vectoriel ou affine, le *sous-espace projectif engendré par une partie* de $P(E)$. Par exemple, dire que deux droites vectorielles engendrent un (et un seul) plan vectoriel se traduit en disant que deux points engendrent une (unique) droite projective (en d'autres termes, que par deux points passe une droite et une seule).

VI.3. Liaison affine/projectif

Montrons maintenant que cette géométrie sans parallèles est analogue à la géométrie affine, dans un sens précis : un espace projectif est un espace affine auquel on a ajouté quelque chose, une droite projective est une droite affine avec un point en plus, et les relations d'incidence sont, à part ça, les mêmes qu'en géométrie affine. Les arguments restent faciles, on fait toujours de l'algèbre linéaire, mais on va jouer maintenant sur trois niveaux. Il va y avoir un espace *vectoriel* E de dimension $n+1$, l'espace *projectif* $P(E)$ de toutes ses droites vectorielles, et un (en fait des) espace(s) *affine(s)* de dimension n qu'on va pouvoir considérer à la fois comme partie(s) de $P(E)$ et hyperplan(s) affine(s) de E.

Introduction : la droite projective

Commençons par le cas des espaces projectifs de dimension 1. Considérons donc un plan vectoriel E. La droite projective $P(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E.

Choisissons une base (e_1, e_2) de E. Toutes les droites vectorielles de E ont un unique vecteur directeur de coordonnées $(x, 1)$, sauf l'axe des x. Dit autrement : toutes les droites vectorielles de E rencontrent la droite affine d'équation $y = 1$ en un unique point, sauf l'axe des x, qui lui est parallèle (figure 3). On vient d'établir une bijection entre la droite projective $P(E)$ privée d'un de ses points (l'axe des x) et la droite affine $y = 1$. On peut donc identifier la droite affine en question au complémentaire d'un point dans la droite projective[1].

Inversement, on peut considérer qu'on a obtenu la droite projective en ajoutant un point à la droite affine. Il est traditionnel d'appeler ce point *point à l'infini* : dans les cas réel ou complexe, l'application :

$$\begin{array}{rcl} (\text{droite affine } y = 1) \cup \{\infty\} & \longrightarrow & P(E) \\ (x, 1) & \longmapsto & \text{la droite vectorielle engendrée par } (x, 1) \\ \infty & \longmapsto & \text{la droite vectorielle engendrée par } (1, 0) \end{array}$$

est un homéomorphisme, si l'on munit l'espace de gauche de la topologie de *compactifié d'Alexandrov* de la droite[2].

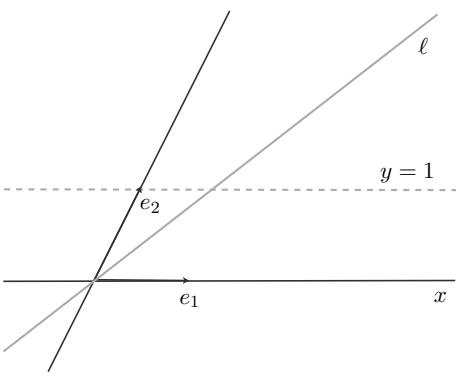


Figure 3

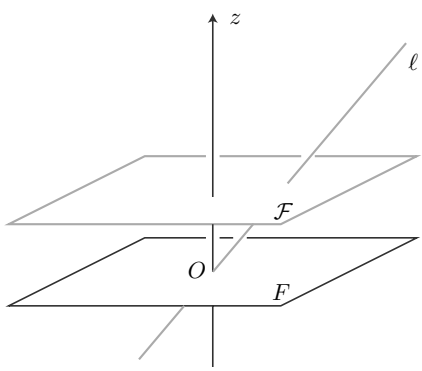


Figure 4

Le plan projectif

On procède de la même façon avec un espace E de dimension 3 : on choisit une base dans laquelle les coordonnées des vecteurs sont notées (x, y, z). Appelons F le plan vectoriel d'équation $z = 0$ et $\mathcal{F}$ le plan affine de direction F dont

[1] J'y reviendrai, mais on pourra déjà remarquer que la droite affine $y = 1$, la bijection et le point manquant *dépendent* du choix de la base.

[2] C'est-à-dire telle que la famille des complémentaires des compacts de la droite affine soit une base de voisinages de ∞ (voir [**7**]).

l'équation est $z = 1$. Une droite vectorielle ℓ de E rencontre $\mathcal{F}$ en un unique point... sauf si elle est contenue dans F, auquel cas elle ne le rencontre pas du tout (figure 4). On a donc une bijection entre $P(E) - P(F)$ et $\mathcal{F}$. Inversement, on peut considérer qu'on obtient le plan projectif $P(E)$ en ajoutant au plan affine $\mathcal{F}$ la droite projective $P(F)$. Celle-ci est dite *droite à l'infini* de $\mathcal{F}$.

En coordonnées, les points $(x, y, 1)$ sont ceux de $\mathcal{F}$, les points à l'infini sont ceux de coordonnées $(x, y, 0)$.

Le cas général : complétion projective d'un espace affine

Soit $\mathcal{F}$ un espace affine de dimension n. On commence par le plonger comme hyperplan affine dans un espace vectoriel E de dimension $n+1$. On peut le faire de façon tout à fait intrinsèque, mais c'est inutilement abstrait, alors on choisit une origine sur $\mathcal{F}$, qui devient ainsi un espace vectoriel F et on considère l'espace vectoriel $E = F \times \mathbf{K}$. On appelle F l'hyperplan vectoriel d'équation $x_{n+1} = 0$ (x_{n+1} est la coordonnée sur le facteur $\mathbf{K}$) et on identifie $\mathcal{F}$ à l'hyperplan affine d'équation $x_{n+1} = 1$ (on considère ainsi que $\mathcal{F} = \mathcal{F} \times \{1\}$).

Chaque droite vectorielle de E qui n'est pas contenue dans F rencontre $\mathcal{F}$ en un unique point. On obtient une bijection entre $\mathcal{F}$ et $P(E) - P(F)$. L'hyperplan projectif $P(F)$ s'appelle l'*hyperplan à l'infini* de $\mathcal{F}$. On remarquera qu'il n'est pas dans $\mathcal{F}$ et qu'il est constitué des directions des droites affines de $\mathcal{F}$.

Droites affines, droites projectives

Gardons les mêmes notations et considérons maintenant les droites affines de l'espace affine $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{D}$ une telle droite. Il existe un unique plan vectoriel qui contient cette droite, le sous-espace (affine) de E engendré par 0 et $\mathcal{D}$ (figure 5). Appelons-le $P_{\mathcal{D}}$. Comme tout sous-espace vectoriel de E, il définit un sous-espace projectif (ici une droite) de $P(E)$, l'ensemble $P(P_{\mathcal{D}})$ de ses droites vectorielles.

Par le plongement de $\mathcal{F}$ dans $P(E)$, la droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}$ est envoyée dans la droite projective associée à $P_{\mathcal{D}}$, que l'on peut voir comme sa complétion projective.

On a donc aussi une bijection entre l'ensemble des droites affines de $\mathcal{F}$ et l'ensemble des droites projectives de $P(E)$ qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan à l'infini $P(F)$.

Intersections de droites dans le plan

Soit $\mathcal{F}$ un plan affine de direction F. On vient de construire un plan projectif P qui est la réunion de $\mathcal{F}$ et de la droite projective $P(F)$, la droite à l'infini de $\mathcal{F}$. Faisons la liste des droites projectives de P. Il s'agit des images des plans vectoriels de l'espace vectoriel de dimension 3. Il y a donc la droite à l'infini, en

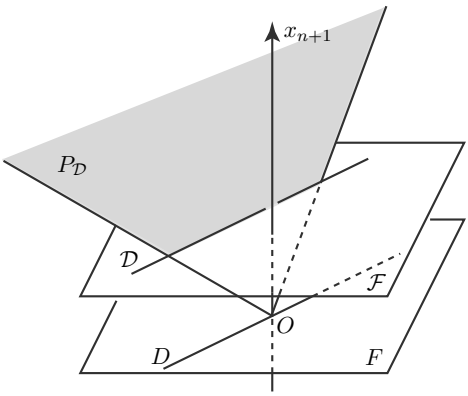


Figure 5

d'autres termes $P(F)$, et toutes les autres droites proviennent des droites affines de $\mathcal{F}$ auxquelles on ajoute un point (qui d'ailleurs est sur $P(F)$). Si $\mathcal{D}$ est une droite affine de $\mathcal{F}$, on note $\infty_{\mathcal{D}}$ ce point.

Remarque VI.3.1. La droite à l'infini est l'ensemble des droites vectorielles D de F, c'est-à-dire l'ensemble des directions des droites affines de $\mathcal{F}$. Chaque point de la droite à l'infini est une direction de droites parallèles dans $\mathcal{F}$.

Nous avons vu (dans la proposition VI.2.1) que deux droites projectives d'un plan projectif se coupent toujours. Testons cet énoncé sur notre liste de droites.

– La droite à l'infini et la droite provenant de la droite affine $\mathcal{D}$ se coupent au point $\infty_{\mathcal{D}}$: en vectoriel, on considère l'intersection du plan $P_{\mathcal{D}}$ et du plan F, c'est la droite vectorielle D, qui est à la fois la direction de $\mathcal{D}$... et le point à l'infini $\infty_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ (j'ai utilisé les notations de la figure 5).

– Considérons maintenant deux droites affines non parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Elles se coupent en un point M de $\mathcal{F}$. Les droites projectives qui leur sont associées se coupent en un point qui n'est autre que la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{OM}$.

– Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, les plans vectoriels $P_{\mathcal{D}}$ et $P_{\mathcal{D}'}$ se coupent le long de leur direction commune D, en d'autres termes les droites projectives associées ont le même point à l'infini $\infty_{\mathcal{D}}$: deux droites parallèles se coupent à l'infini.

Choix de l'infini

Dans un plan projectif, il n'y a pas de droite à l'infini. En d'autres termes, toute droite peut être choisie comme droite à l'infini. Considérons plus généralement l'espace projectif $P(E)$. Choisissons un hyperplan F quelconque dans E et retirons

à $P(E)$ l'hyperplan projectif correspondant $P(F)$. Le résultat est un espace affine $\mathcal{F}$ dirigé par F et dont l'hyperplan à l'infini est $P(F)$.

Concrètement, tout hyperplan peut être considéré comme hyperplan à l'infini. Cette remarque a de nombreuses applications. Plutôt que de la théoriser de manière absconse, donnons-en tout de suite deux applications, des démonstrations des formes les plus générales des théorèmes de Pappus et Desargues comme conséquences des cas particuliers simples vus au chapitre I. Nous reviendrons sur la question du choix de l'infini après les démonstrations de ces deux théorèmes.

Le théorème de Pappus

Voici l'énoncé général du théorème de Pappus. On remarquera qu'il est plus simple que celui donné dans l'exercice I.59 : il est inutile de supposer que les droites se coupent, puisqu'on est en projectif... ou on est en affine et deux droites parallèles se coupent sur la droite à l'infini.

Théorème VI.3.2. *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites et soient A, B et C trois points de $\mathcal{D}$, A', B' et C' trois points de $\mathcal{D}'$. Soient α, β et γ les points d'intersection de $B'C$ et $C'B$, $C'A$ et $A'C$, et $A'B$ et $B'A$ respectivement. Alors α, β et γ sont alignés.*

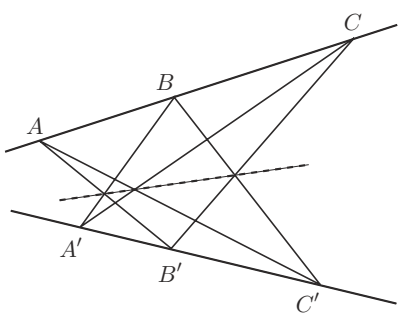


Figure 6. Théorème de Pappus

Démonstration. On considère la droite projective $\alpha\gamma$ comme droite à l'infini. En d'autres termes, on étudie le problème dans le plan affine obtenu en retirant cette droite au plan projectif. Dire que $B'C$ et $C'B$ se coupent sur la droite à l'infini, c'est dire qu'elles sont parallèles, de même $A'B$ et $B'A$ sont parallèles et on n'a plus qu'à appliquer la version affine faible (le théorème I.4.5) pour conclure : $C'A$ et $A'C$ sont parallèles et donc se coupent sur la droite à l'infini... c'est dire que le point β est sur $\alpha\gamma$. □

On trouvera une démonstration « complètement projective » du théorème de Pappus dans l'exercice VI.15.

Le théorème de Desargues

On peut procéder exactement de la même manière pour démontrer le théorème de Desargues (même remarque quant à la simplicité de l'énoncé par rapport à celui de l'exercice I.60) :

Théorème VI.3.3. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Soient α, β et γ les points d'intersection des droites BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$. Alors les points α, β et γ sont alignés si et seulement si les droites AA', BB' et CC' sont concourantes.*

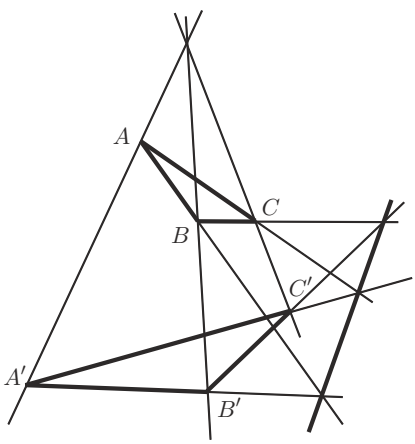


Figure 7. Théorème de Desargues

Démonstration. On suppose que les trois points alignés et on envoie la droite qu'ils déterminent à l'infini. On applique la version affine faible (c'est-à-dire le théorème I.4.6) et on en déduit que les trois droites sont concourantes. On peut démontrer la réciproque comme conséquence du sens direct, mais je ne vais pas le faire ici : il y a un argument typiquement projectif et extrêmement élégant que je garde pour la bonne bouche (voir le § VI.4). □

On peut construire la géométrie (affine ou projective) grâce à des propriétés d'incidence, droites concourantes, points alignés, qui suffisent à définir toutes les structures présentes, en particulier à reconstruire le corps de base (comme dans le théorème fondamental de la géométrie affine, ici l'exercice I.67). Le théorème de

Pappus est la propriété qui affirme que ce corps est commutatif, celui de Desargues donne l'associativité de la multiplication (voir [**3**]).

Choix de l'infini (suite)

Les lecteurs peuvent se demander pourquoi, dans aucun des deux énoncés VI.3.2 et VI.3.3 ci-dessus, on n'a précisé si on se plaçait dans un plan affine ou dans un plan projectif. Pour répondre à cette question, reproduisons côte à côte la figure 6 de ce chapitre et la figure 12 du chapitre I.

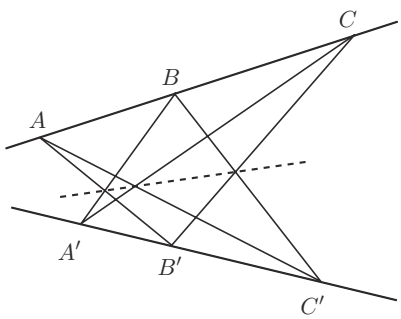


Figure 8. Pappus au chapitre VI

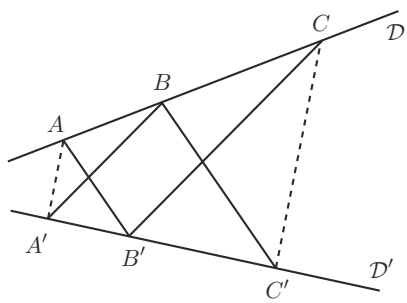


Figure 9. Pappus au chapitre I

La figure de gauche est dessinée dans un plan affine $\mathcal{E}$ (celui qui prolonge la feuille de papier). On complète ce plan en un plan projectif P en lui ajoutant une droite à l'infini. Elle est ainsi dessinée dans un plan projectif dont nous ne voyons pas la droite à l'infini. Ensuite, on retire à P la droite en pointillés. Le résultat est un plan affine $\mathcal{E}'$, celui dans lequel notre figure se présente comme la figure de droite. On aura donc compris que les deux figures sont dessinées dans deux plans affines *différents* $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ du plan projectif P.

Mais... les deux figures sont, quand même, dessinées sur la même feuille de papier. Il n'est donc pas absurde de vouloir les considérer dans le même plan affine (c'est bien ce qu'a fait la dessinatrice). Dans ce cas, la philosophie serait plutôt de considérer que l'une est obtenue à partir de l'autre par une transformation convenable. On y reviendra au § VI.5.

VI.4. Dualité projective

La dualité projective est l'expression géométrique des propriétés des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel et de son dual. Commençons donc par quelques rappels d'algèbre linéaire.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Considérons le sous-espace F' du dual $E^\star$ (espace vectoriel des formes linéaires sur E) défini par

$$F' = \{\varphi \in E^\star \mid \varphi|_F = 0\}\,.$$

C'est l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur F. C'est bien un sous-espace vectoriel de $E^\star$ (c'est clair ?) de dimension

$$\dim F' = \dim E - \dim F$$

(voir au besoin l'exercice VI.1). Par exemple, si E est de dimension 3, une droite F de E définit un plan du dual $E^\star$, un plan de E définit une droite de $E^\star$.

Les deux tableaux suivants résument le profit que l'on peut espérer tirer de cette remarque en géométrie projective plane. Le premier résume les points de vue sur les espaces. Le second parle des relations d'incidence, conséquences du fait plus ou moins évident suivant :

$$F \subset G \Longleftrightarrow F' \supset G'.$$

Il utilise les notations du premier... sauf qu'on y a supprimé les $'$ et les E devenus inutiles.

$P(E)$	E	$E^\star$	$P(E^\star)$
$a \in P(E)$ point	$a \subset E$ droite vectorielle	$a' \subset E^\star$ plan vectoriel	$P(a') = A' \subset P(E^\star)$ droite projective
$D = P(d) \subset P(E)$ droite projective	$d \subset E$ plan vectoriel	$d' \subset E^\star$ droite vectorielle	$d' \in P(E^\star)$ point

a point de P	A droite de $P^\star$
D droite de P	d point de $P^\star$
$a \in D$	$A \ni d$
trois points alignés dans P	trois droites concourantes dans $P^\star$
droite ab	point $A \cap B$

La figure 10 montre, par exemple, ce qu'il advient[3] de trois droites concourantes P, Q, R passant par les trois sommets a, b, c d'un triangle (plan de gauche)

[3] Cette traduction est appelée « métamorphose » dans [**49**].

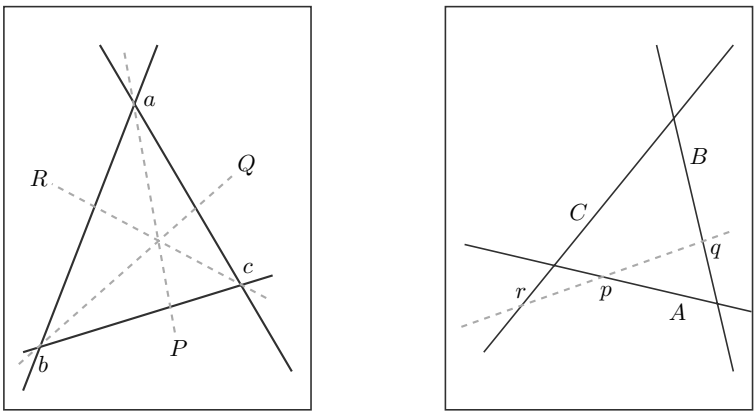


Figure 10

par dualité : trois points alignés p, q et r situés sur les trois côtés A, B et C d'un triangle (plan de droite).

Ces propriétés sont une machine à multiplier les théorèmes par 2 : tout énoncé dans le plan P fournit un autre énoncé dans le plan $P^\star$... qui est un plan projectif tout aussi ordinaire que P. Par exemple, il existe un énoncé « dual » du théorème de Pappus, qui est un autre théorème (et qui s'est trouvé démontré lorsque nous avons démontré ce premier théorème), voir l'exercice VI.33.

Examinons ici le théorème de Desargues.

Démonstration de la réciproque du théorème de Desargues

On utilise ici les mêmes notations que dans l'énoncé du théorème VI.3.3. Commençons par métamorphoser la figure 7.

– Les triangles ABC et $A'B'C'$ du plan P deviennent les triangles de côtés $A^\star$, $B^\star$, $C^\star$ et $A'^\star$, $B'^\star$, $C'^\star$ du plan dual $P^\star$.

– Appelons abc, $a'b'c'$ ces triangles, en nommant leurs sommets de façon que $a = B^\star \cap C^\star$, *etc.* Ainsi le point a de $P^\star$ est dual de la droite BC de P.

– Les points α, β et γ de P deviennent des droites dans $P^\star$. Comme $\alpha = BC \cap B'C'$, la droite $\alpha^\star$ contient les points a et a', donc $\alpha^\star = aa'$, *etc.*

– Les droites AA', BB' et CC' de P deviennent des points $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ de $P^\star$. Par définition, $\mathfrak{a} = A^\star \cap A'^\star = bc \cap b'c'$, *etc.*

Nous avons démontré (ce que nous avons considéré comme le « sens direct » du théorème VI.3.3) que, étant donnés deux triangles ABC et $A'B'C'$ d'un plan P, si les trois points α, β et γ d'intersection de leurs côtés sont alignés, alors les trois droites AA', BB' et CC' sont concourantes. Appliquons ce résultat aux triangles

abc et $a'b'c'$ dans le plan $P^\star$: nous savons donc que si les trois points $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont alignés, alors les trois droites aa', bb' et cc' sont concourantes.

Traduisons maintenant cet énoncé de $P^\star$ à P (toutes ces traductions sont résumées dans le tableau ci-dessous).

– D'abord l'hypothèse. Dire que les trois points $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont alignés, c'est dire que les trois droites AA', BB' et CC' sont concourantes.

– Puis la conclusion. Dire que les trois droites aa', bb' et cc' sont concourantes, c'est dire que les trois points α, β et γ sont alignés.

Nous avons donc montré, par ce tour de passe-passe, que, si les droites AA', BB' et CC' sont concourantes, les points α, β et γ sont alignés, c'est-à-dire la réciproque du théorème de Desargues. Plus précisément, nous avons simplement constaté que la réciproque était l'énoncé dual de l'énoncé direct (et inversement !).

□

Dans P	Dans $P^\star$
triangle de sommets A, B et C triangle de sommets A', B' et C'	triangle de côtés $A^\star$, $B^\star$ et $C^\star$ triangle de côtés $A'^\star$, $B'^\star$ et $C'^\star$
côté BC du triangle ABC *etc.*	sommet a du triangle ci-dessus $a = B^\star \cap C^\star$ *etc.**
le point $\alpha = BC \cap B'C'$ idem	la droite $\alpha^\star = aa'$ idem*
la droite AA' ...	le point $A^\star \cap A'^\star$ c'est-à-dire $\mathfrak{a} = bc \cap b'c'$ ...
les points α, β et γ sont alignés	les droites aa', bb' et cc' sont concourantes
les droites AA', BB' et CC' sont concourantes	les points $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont alignés

VI.5. Homographies

Soient E et E' deux espaces vectoriels, $p : E - \{0\} \to P(E)$ et $p' : E' - \{0\} \to P(E')$ les deux projections.

Une *homographie* $g : P(E) \to P(E')$ est une application telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ tel que $p' \circ f = g \circ p$, en d'autres termes tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E - \{0\} & \xrightarrow{f} & E' - \{0\} \\ p \big\downarrow & & \big\downarrow p' \\ P(E) & \xrightarrow{g} & P(E') \end{array}$$

soit commutatif.

Très concrètement, l'image par g d'un point ℓ de $P(E)$ (droite vectorielle de E) est la droite vectorielle $\ell' = f(\ell)$ de E' (point de $P(E')$).

Remarque VI.5.1. Attention, une application linéaire quelconque $f : E \to E'$ ne définit pas toujours une application de $P(E)$ dans $P(E')$: en général, l'image de $E - \{0\}$ n'est pas contenue dans $E' - \{0\}$. Dit autrement, l'image d'une droite vectorielle par une application linéaire peut très bien ne pas être une droite vectorielle, être réduite à 0. Une application linéaire f définit une application $P(E) - P(\operatorname{Ker} f) \to P(E')$ et rien de plus. On ne considérera donc ici que des isomorphismes.

L'image d'un plan vectoriel par un isomorphisme linéaire est un plan vectoriel. En traduction projective : l'image d'une droite projective par une homographie est une droite projective.

Groupe projectif

Considérons maintenant le groupe des homographies de $P(E)$.

Proposition VI.5.2. *Les homographies de $P(E)$ dans lui-même forment un groupe pour la composition des applications, noté* $\mathrm{GP}(E)$ *(groupe projectif de E).*

L'application qui, à un isomorphisme linéaire $E \to E$, associe une homographie de $P(E)$ est un homomorphisme surjectif de groupes, dont le noyau est le groupe des homothéties de E.

Remarque VI.5.3. En particulier, $\mathrm{GP}(E)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}(E)/\{\text{homothéties}\}$. On le note souvent aussi $\mathrm{PGL}(E)$, $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{K})$ pour $E = \mathbf{K}^n$ et $P(E) = \mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Il est clair par définition que, si g et g' sont des homographies, provenant d'isomorphismes f et f' d'espaces vectoriels, $g \circ g'$ est l'homographie provenant de $f \circ f'$, que l'identité de $P(E)$ est une homographie provenant de l'identité de E et que g^{-1} est une homographie provenant de l'isomorphisme f^{-1}.

On a ainsi à la fois le fait que $GP(E)$ est un groupe et le fait que l'application $f \mapsto g$ est un morphisme de groupes.

Ce dernier est surjectif par définition. Cherchons son noyau. Soit $f : E \to E$ un isomorphisme linéaire induisant l'identité de $P(E)$. C'est dire que f préserve toutes les droites vectorielles, ou encore que, pour tout x dans E, il existe un scalaire λ (dépendant *a priori* de x) tel que $f(x) = \lambda x$. On en déduit comme d'habitude (voir par exemple l'exercice I.16) que f est une homothétie. □

Coordonnées homogènes et repères projectifs

Une base $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de l'espace vectoriel E étant donnée, les vecteurs de E peuvent se décrire par leurs coordonnées $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ dans cette base. Un point m de $P(E)$ peut aussi être décrit par les coordonnées d'un vecteur (non nul) x qui engendre la droite vectorielle m. Les $(n+1)$-uplets $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ et $(x'_1, \ldots, x'_{n+1})$ représentent le même point m de $P(E)$ si et seulement s'il existe un scalaire λ non nul tel que l'on ait

$$x'_i = \lambda x_i \text{ pour tout } i.$$

On appelle la classe d'équivalence de $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des *coordonnées homogènes* pour m. On la note souvent $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

Les points $p(e_1), \ldots, p(e_{n+1})$ ne suffisent pas à déterminer la base $(e_1, \ldots, e_{n+1})$, même à un coefficient de proportionnalité près : ils déterminent évidemment les droites vectorielles engendrées par les vecteurs $e_1, \ldots, e_{n+1}$, c'est-à-dire tous les $\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_{n+1} e_{n+1}$, mais rien de plus.

Par contre, si l'on leur ajoute le $(n+2)$-ième point $p(e_1 + \cdots + e_{n+1})$, on reconstitue les vecteurs $e_1, \ldots, e_{n+1}$ à un *unique* coefficient près. C'est ce qu'affirme le lemme VI.5.5 ci-dessous et ce qui justifie la définition suivante :

Définition VI.5.4. Si E est un espace vectoriel de dimension $n+1$, on appelle *repère projectif* de $P(E)$ un système de $n+2$ points $(m_0, m_1, \ldots, m_{n+1})$ de $P(E)$ tels que $m_1, \ldots, m_{n+1}$ soient les images des vecteurs $e_1, \ldots, e_{n+1}$ d'une base de E et m_0 l'image de $e_1 + \cdots + e_{n+1}$.

Un repère projectif est ainsi une famille de $n+2$ points tels qu'aucun d'eux ne soit dans le sous-espace projectif déterminé par les $n+1$ autres (exercice VI.6).

Les coordonnées homogènes de m dans la base $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ ne dépendent que du repère projectif $(p(e_1), \ldots, p(e_{n+1}))$. On peut donc parler de coordonnées homogènes dans un repère projectif.

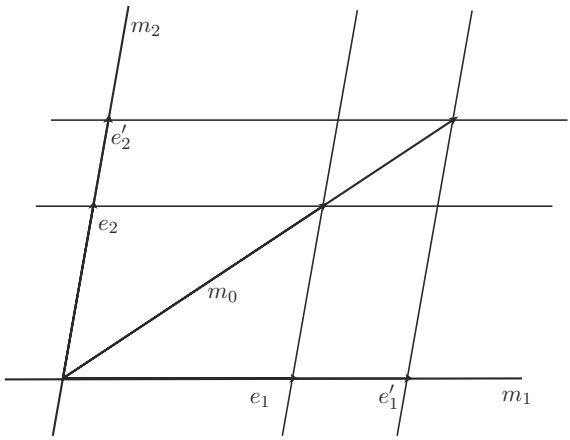


FIGURE 11

Lemme VI.5.5. *Soit $(m_0, m_1, \ldots, m_{n+1})$ un repère projectif de $P(E)$. Si deux bases $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ et $(e'_1, \ldots, e'_{n+1})$ de E sont telles que $p(e_i) = p(e'_i) = m_i$ et $p(e_1 + \cdots + e_{n+1}) = p(e'_1 + \cdots + e'_{n+1}) = m_0$, alors elles sont proportionnelles.*

Démonstration. On considère les points m_i de $P(E)$ comme des droites vectorielles de E. Les vecteurs e_i et e'_i dirigent la droite vectorielle m_i donc $e'_i = \lambda_i e_i$ pour un certain scalaire non nul λ_i (ceci pour $1 \leq i \leq n+1$). On utilise le $(n+2)$-ième point pour conclure : $e'_1 + \cdots + e'_{n+1}$ est proportionnel à $e_1 + \cdots + e_{n+1}$ donc il existe un scalaire non nul λ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = \lambda(e_1 + \cdots + e_{n+1}).$$

Comme nous avons affaire à une base, on a $\lambda_i = \lambda$ pour tout i, donc les λ_i sont égaux et les deux bases sont proportionnelles. □

Proposition VI.5.6. *Soient $P(E)$ et $P(E')$ deux espaces projectifs de dimension n. Toute homographie de $P(E)$ dans $P(E')$ envoie un repère projectif de $P(E)$ sur un repère projectif de $P(E')$. Si $(m_0, \ldots, m_{n+1})$ et $(m'_0, \ldots, m'_{n+1})$ sont des repères projectifs de $P(E)$ et $P(E')$ respectivement, il existe une unique homographie $g : P(E) \to P(E')$ telle que $m'_i = g(m_i)$ pour tout i.*

Démonstration. La première assertion est claire. Pour la deuxième, on choisit des bases

$$(e_1, \ldots, e_{n+1}) \text{ de } E \text{ et } (e'_1, \ldots, e'_{n+1}) \text{ de } E'$$

telles que l'on ait

$$p(e_i) = m_i, \quad p'(e'_i) = m'_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n+1,$$

et $p(\sum e_i) = m_0$, $p'(\sum e'_i) = m'_0$. Il existe un unique isomorphisme $f$de E dans E' tel que $f(e_i) = e'_i$. Il satisfait nécessairement à $f(\sum e_i) = \sum e'_i$. L'homographie g déduite de f envoie bien le premier repère sur le second.

Montrons l'unicité de l'homographie g ainsi déterminée. Si g et g' sont deux telles homographies, l'homographie ${g'}^{-1} \circ g$ de $P(E)$ dans lui-même laisse le repère $(m_0, \ldots, m_{n+1})$ invariant. D'après le lemme précédent, elle provient d'une homothétie $\lambda \operatorname{Id}_E$, c'est donc l'identité. □

Homographies de la droite

Par exemple, un repère d'une droite projective est constitué de *trois* points distincts (on remarquera toutefois qu'il suffit de deux points pour définir une droite projective : c'est la traduction projective du fait que deux vecteurs indépendants définissent un plan vectoriel). Donc, pour connaître une homographie d'une droite projective dans elle-même, il suffit de connaître les images de trois points.

Qui sont les homographies, dans ce cas ? Reprenons les notations du paragraphe VI.3. Une homographie provient d'un isomorphisme linéaire $f : E \to E$ où E est un plan vectoriel muni d'une base (e_1, e_2). En d'autres termes,

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

avec $ad - bc \neq 0$. Écrivons maintenant $z = x/y$, de sorte que $(x, y) \sim (z, 1)$. Alors

$$f(z, 1) = (az + b, cz + d) \sim \left(\frac{az + b}{cz + d}, 1\right)$$

... pourvu que $y \neq 0$ et qu'on ait le droit de faire la division. L'image du point à l'infini $\infty = (1, 0)$ est (a, c) (en général, $(a/c, 1)$) et celle de $(-d, c)$ est $(-ad + bc, 0) \sim (1, 0) \sim \infty$. Il est aussi simple d'écrire que l'homographie est

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

dans ce cas, en sous-entendant les conventions habituelles sur l'image a/c et l'antécédent $-d/c$ de ∞.

Choix de l'infini (suite)

Revenons à la question de l'expédition d'objets à l'infini évoquée autour des démonstrations des théorèmes de Pappus et Desargues au § VI.3 et considérons à nouveau les deux configurations dessinées pour le théorème de Pappus (voir les figures 8 et 9) mais essayons de les voir dans le *même* plan affine $\mathcal{E}$ (le point de vue de la dessinatrice).

La figure de droite est « plus simple » que la figure de gauche. On considère qu'elle est obtenue à partir de la figure de gauche par une transformation du plan.

Il ne peut s'agir d'une transformation affine puisque certaines droites sécantes sont envoyées sur des droites parallèles... il ne s'agit même pas vraiment d'une transformation du plan affine (pour la même raison). Il s'agit bien sûr d'une homographie du complété projectif P du plan affine $\mathcal{E}$. Dans le cas précis des deux figures illustrant le théorème de Pappus, c'est une homographie qui envoie la droite en pointillés sur la droite à l'infini.

La philosophie de l'expédition d'objets à l'infini n'est ici que la version projective du principe très général consistant à transformer un problème en un problème plus simple ou déjà résolu... par une transformation *ad hoc*.

Homographies et transformations affines

... Ce qui nous amène à considérer les transformations affines de l'espace affine $\mathcal{E}$ parmi les homographies du complété projectif P : ce sont les homographies qui préservent (globalement) l'hyperplan à l'infini.

Proposition VI.5.7. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E et $P(E \oplus \mathbf{K})$ son complété projectif. Toute homographie de $P(E \oplus \mathbf{K})$ qui conserve l'hyperplan à l'infini définit par restriction une transformation affine de $\mathcal{E}$. Inversement, toute transformation affine de $\mathcal{E}$ se prolonge en une unique homographie de $P(E \oplus \mathbf{K})$.*

Démonstration. Soit $g : P(E \oplus \mathbf{K}) \to P(E \oplus \mathbf{K})$ une homographie. Comme g préserve l'hyperplan à l'infini $P(E)$, elle préserve son complémentaire $\mathcal{E}$. Elle induit donc une transformation

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

dont nous voulons montrer qu'elle est affine.

Si f est un automorphisme linéaire de $E \oplus \mathbf{K}$ qui définit l'homographie g, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(u,0) & = & (h(u),0) \\ f(0,1) & = & (v,a) \end{array} \right.$$

où h est un automorphisme linéaire de E et a un scalaire non nul. On peut choisir f (et donc h) de façon que a soit égal à 1, c'est-à-dire de façon que $f(0,1)$ soit dans le sous-espace affine $\mathcal{E}$ de $E \oplus \mathbf{K}$. Appelons O le point $(0,1)$ de $\mathcal{E}$. Pour tout point $M = (u,1)$ de $\mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} &= f(u,1) - f(0,1) \\ &= (h(u),0) \end{aligned}$$

de sorte que φ est affine : l'application linéaire associée est h.

Inversement, si φ est une transformation affine de $\mathcal{E}$, appelons h l'isomorphisme linéaire de E qui lui est associé ($h = \overrightarrow{\varphi}$) et définissons une application

$$\begin{array}{rccc} f: & E \oplus \mathbf{K} & \longrightarrow & E \oplus \mathbf{K} \\ & (u, a) & \longmapsto & a\varphi(0,1) + (h(u), 0) \end{array}$$

de sorte que φ coïncide avec h sur E et avec φ sur $\mathcal{E}$. Il est clair que f est linéaire et bijective. L'homographie g déduite de f a donc les propriétés attendues.

L'unicité d'une homographie g prolongeant φ est automatique. À tout point de $\mathcal{E}$, g fait subir le même traitement que φ. Quant aux points de l'hyperplan à l'infini $P(E)$, ce sont les directions des droites de $\mathcal{E}$, sur l'ensemble desquelles φ opère, on l'aura compris, par l'homographie de $P(E)$ définie par l'application linéaire h associée à φ. □

VI.6. Birapport

Si D est une droite projective, trois points (distincts) a, b et c forment un repère projectif. Il existe une unique homographie de la droite sur $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$ qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1. Si d est un autre point de D, l'image de d par cette homographie est un point de $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$ qu'on appelle *le birapport de* (a, b, c, d) et qu'on note $[a, b, c, d]$.

On peut parler du birapport de quatre points alignés dans un espace projectif quelconque.

Par définition, le birapport $[a, b, c, d]$ vaut

- ∞ quand $d = a$
- 0 quand $d = b$
- 1 quand $d = c$.

Le birapport est un élément de $\mathbf{K} - \{0, 1\}$ si et seulement si les quatre points sont distincts. De plus, pour tout $k \in \mathbf{K} \cup \{\infty\}$, il existe un et un seul point d sur la droite D tel que $[a, b, c, d] = k$.

La propriété la plus importante du birapport est sa conservation par les homographies, ce qu'exprime plus précisément la proposition suivante.

Proposition VI.6.1. *Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 quatre points de D (les trois premiers étant distincts) et a'_1, a'_2, a'_3 et a'_4 quatre points d'une droite D' (vérifiant la même hypothèse). Pour qu'il existe une homographie $f : D \to D'$ telle que $f(a_i) = a'_i$, il faut et il suffit que $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4]$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition. Supposons d'abord que $f : D \to D'$ soit une homographie qui envoie a_i sur a'_i. Soit

$$g' : D' \longrightarrow \mathbf{K} \cup \{\infty\}$$

l'unique homographie qui envoie a'_1 sur ∞, a'_2 sur 0 et a'_3 sur 1. On a donc $[a'_1, a'_2, a'_3, a'_4] = g'(a'_4)$... mais alors $g' \circ f$ est une (et donc l'unique) homographie qui envoie a_1 sur ∞, a_2 sur 0 et a_3 sur 1. Donc

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = g' \circ f(a_4) = g'(a'_4) = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4]$$

et le birapport est conservé.

Inversement, il y a une unique homographie f qui envoie a_i sur a'_i (pour $i \leq 3$). Reste à vérifier que $f(a_4) = a'_4$, ce qui est vrai d'après la partie directe. □

Calcul du birapport

Bien qu'on ait assez peu l'occasion (et que je préfère éviter) de les utiliser, il y a des formules pour exprimer le birapport. D'abord, la plus classique.

Proposition VI.6.2. *Soient a, b, c et d quatre points d'une droite affine, les trois premiers étant supposés distincts. Alors*

$$[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} \Big/ \frac{c-b}{c-a}.$$

Démonstration. L'unique homographie qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1 est

$$z \longmapsto \frac{z-b}{z-a} \Big/ \frac{c-b}{c-a}$$

puisqu'elle a un pôle en a et un zéro en b. La formule annoncée donne donc bien l'image du point d. □

Il y en a de plus générales (?) et plus compliquées. Elles sont basées sur le lemme suivant.

Lemme VI.6.3. *Soient a, b et c trois points distincts d'une droite projective $D = P(E)$. Soient x et y des vecteurs de E tels que $a = p(x)$, $b = p(y)$, $c = p(x+y)$. Alors d est l'image de $hx + ky$ si et seulement si le birapport $[a, b, c, d]$ est l'image de (h, k) dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{K}) = \mathbf{K} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration. Comme a et b sont distincts, les vecteurs x et y forment une base de E. Soit f l'isomorphisme $E \to \mathbf{K}^2$ qui envoie la base (x, y) sur la base canonique. L'homographie g définie par f envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1. Elle envoie donc d sur le birapport $[a, b, c, d]$. Mais f envoie $hx + ky$ sur $(h, k) \in \mathbf{K}^2$, ainsi g envoie d sur l'image de (h, k) dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$. □

Soit maintenant E un plan vectoriel de base (e_1, e_2). On considère quatre points a_i (pour $1 \leq i \leq 4$) dans $P(E)$ et on suppose que les trois premiers sont distincts. On suppose que a_i est l'image d'un vecteur de coordonnées (λ_i, μ_i). On va démontrer que

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}} \Bigg/ \frac{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_1 \\ \mu_4 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}}.$$

Choisissons pour chaque i un des vecteurs x_i engendrant la droite vectorielle a_i. Comme a_1 et a_2 sont distincts, x_1 et x_2 sont indépendants et on peut écrire x_3 et x_4 dans cette base

$$\begin{cases} x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_4 = \gamma x_1 + \delta x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}(\alpha x_1) + \dfrac{\delta}{\beta}(\beta x_2). \end{cases}$$

En appliquant le lemme précédent à $x = \alpha x_1$, $y = \beta x_2$, on obtient

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{\gamma}{\alpha} \Big/ \frac{\delta}{\beta}.$$

On exprime maintenant tout dans la base (e_1, e_2) et on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta = \lambda_3 \\ \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta = \mu_3 \end{cases}$$

donc

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}.$$

De même $x_4 = \gamma x_1 + \delta x_2$ donne des formules analogues pour γ et δ (remplacer 3 par 4 dans celles donnant α et β). On en déduit la formule annoncée. □

Voici quelques exemples utiles et concrets.

– Quand la droite projective est la complétion d'une droite affine $\mathcal{D}$ et quand les points a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des points de $\mathcal{D}$, on retrouve la formule classique obtenue dans la proposition VI.6.2 : puisque l'on a $a_i \neq \infty_{\mathcal{D}}$, on peut choisir chaque μ_i égal à 1.

– Si a, b et c sont trois points d'une droite affine $\mathcal{D}$, on peut calculer le birapport $[a, b, c, \infty_{\mathcal{D}}]$. On choisit maintenant $\mu_i = 1$ pour $i \leq 3$ et $\mu_4 = 0$. On obtient :

$$[a, b, c, \infty_{\mathcal{D}}] = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}.$$

De la même formule, on déduit immédiatement la première série d'égalités de la proposition suivante... mais ce n'est pas la meilleure démonstration (voir l'exercice VI.28).

Proposition VI.6.4. *Si a, b, c et d sont quatre points alignés distincts, on a les égalités*

$$[a, b, c, d] = [b, a, c, d]^{-1} = [a, b, d, c]^{-1},$$

$$[a, b, c, d] + [a, c, b, d] = 1.$$

Démonstration. Montrons la deuxième égalité. Écrivons

$$a = p(x), \quad b = p(y), \quad c = p(x + y) \quad \text{et } d = p(hx + ky)$$

(comme dans le lemme VI.6.3). Soit $x' = -x$ (de sorte que $p(x') = a$) et soit $y' = x + y$ (de sorte que $p(y') = c$). Alors

$$y = x' + y' \text{ et } hx + ky = (k - h)x' + ky'.$$

Ainsi

$$[a, c, b, d] = \frac{k - h}{k} = 1 - \frac{h}{k} = 1 - [a, b, c, d],$$

ce que nous voulions démontrer. □

Remarque VI.6.5. Étant donnés quatre points a, b, c et d d'une droite, on peut les arranger de vingt-quatre façons différentes. La proposition précédente a pour conséquence que beaucoup des birapports obtenus coïncident, les birapports différents sont en général au nombre de 6. Si $[a, b, c, d] = k$, ces six valeurs sont (voir l'exercice VI.27)

$$k, \quad \frac{1}{k}, \quad 1 - k, \quad 1 - \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{1 - k}, \quad \frac{k}{k - 1}.$$

Division harmonique

On dit que quatre points alignés distincts forment une *division harmonique* quand leur birapport vaut -1. Si $[a, b, c, d] = -1$, on dit que b est le *conjugué harmonique* de a par rapport à c et d et que d est le *quatrième harmonique* de a, b et c.

Par exemple, si a, b et c sont trois points d'une droite affine $\mathcal{D}$, les points a, b, c et $\infty_{\mathcal{D}}$ forment une division harmonique quand $\overline{ac} = -\overline{bc}$, c'est-à-dire exactement quand c est le milieu du segment ab.

VI.7. Droite projective complexe, groupe circulaire

On suppose maintenant que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on s'intéresse à la droite projective $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

Quatorze façons de décrire la droite[(4)]

On considérera $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ comme

– l'espace (quotient) des droites vectorielles de $\mathbf{C}^2$;

– celui des vecteurs de longueur 1 dans l'espace hermitien $\mathbf{C}^2$ — la sphère S^3 de dimension 3 — modulo l'opération du groupe $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1 par multiplication des coordonnées ;

– la complétion projective de la droite affine complexe : $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (cet avatar de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est souvent appelé *sphère de Riemann*) ;

– la sphère unité S^2 de l'espace $\mathbf{C} \oplus \mathbf{R}$, *via* la projection stéréographique (voir les exercices V.34 et V.52) ;

– ...

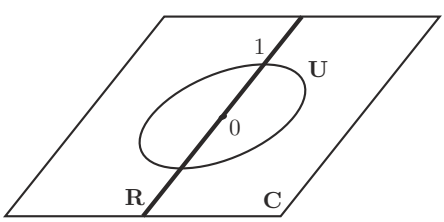


Figure 12. La droite $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$

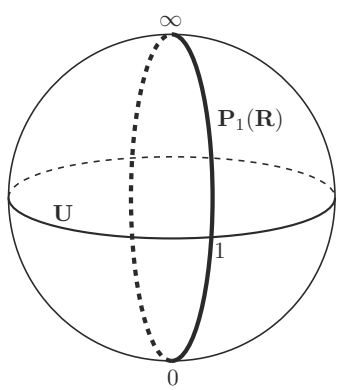


Figure 13. La droite $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$

On va aussi se souvenir que $\mathbf{C}$ contient $\mathbf{R}$ et donc que $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ contient $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$. On peut retrouver trace du sous-espace $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ dans chacune des descriptions de

(4) Voir le § 32 de [**27**] ou écouter [**19**].

$\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ qui précèdent (exercice VI.47). Je me contenterai ici de dire que

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

(le point à l'infini de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est réel). Pour bien comprendre cette inclusion, on pourra contempler la figure 12 (qui représente l'axe réel et le cercle unité dans $\mathbf{C}$) et sa transformée par la projection stéréographique, la figure 13.

Ce cadre étant posé, nous allons nous intéresser surtout à $\mathbf{C}$ comme au plan (réel) affine euclidien.

Remarque VI.7.1. C'est aux droites affines réelles et aux cercles que nous allons nous intéresser, mais bien dans la complétion projective $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ où l'on ajoute un point au plan et *pas* dans la complétion $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ où l'on lui ajoute toute une droite projective.

Les homographies

Nous avons vu que le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ des homographies est constitué des transformations de la forme

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0.$$

Proposition VI.7.2. *Le groupe* $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ *est engendré par les similitudes directes (de la forme* $z \mapsto az + b$ *avec* $a \neq 0$*) et l'application* $z \mapsto 1/z$*.*

Démonstration. On fait simplement la division euclidienne de $az + b$ par $cz + d$:

$$\frac{az+b}{cz+d} \begin{cases} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c}\dfrac{1}{cz+d} & \text{si } c \neq 0 \\ \text{est une similitude} & \text{si } c = 0, \end{cases}$$

ce qui donne le résultat. □

Corollaire VI.7.3. *Les éléments de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ *conservent les angles orientés.*

Ce corollaire doit être compris dans le même sens que l'énoncé analogue pour les inversions dans le corollaire III.4.5 : les éléments de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ ne préservent pas les droites.

Démonstration. Pour le démontrer, on pourrait tout simplement appliquer le fait que les applications holomorphes conservent les angles (exercice III.70).

Pour celles des lectrices qui n'apprécieraient pas les fonctions holomorphes à leur juste valeur, c'est aussi une conséquence de la proposition précédente : les similitudes directes conservent les angles, donc il suffit de montrer qu'il en est de même de l'application $z \mapsto 1/z$. Or, celle-ci est composée de la réflexion $z \mapsto \overline{z}$

et de l'inversion $z \mapsto 1/\overline{z}$ qui les renversent toutes les deux (voir la proposition III.1.11 et le corollaire III.4.5). □

Birapport et cercles

Remarquons d'abord :

Proposition VI.7.4. *Le birapport de quatre points alignés sur une droite affine réelle contenue dans* $\mathbf{C}$ *coïncide avec leur birapport comme points de la droite affine complexe* $\mathbf{C}$.

Démonstration. Soit f l'unique homographie (de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$) qui envoie ∞ sur a, 0 sur b et 1 sur c. Soit $k = [a, b, c, d]_{\mathbf{R}}$. Alors $f(k) = d$.

Mais $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$ est contenu dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ donc, comme $f(k) = d$,

$$[a, b, c, d]_{\mathbf{C}} = k = [a, b, c, d]_{\mathbf{R}}.$$ □

Notons en particulier que ce birapport est réel. La proposition et le corollaire suivants sont très utiles.

Proposition VI.7.5. *Pour que quatre points de* $\mathbf{C}$ *soient alignés (sur une droite affine réelle) ou cocycliques, il faut et il suffit que leur birapport soit réel.*

Démonstration. Puisqu'on parle du birapport des quatre points a, b, c et d, c'est que les trois premiers sont distincts. Si d coïncide avec a, b ou c, il n'y a que trois points, ils sont donc cocycliques (ou alignés) et leur birapport est bien réel puisqu'il vaut ∞, 0 ou 1. On peut donc supposer que les quatre points sont distincts. Dans ce cas, le rapport

$$\frac{c-a}{c-b} \Big/ \frac{d-a}{d-b}$$

a pour argument une mesure de l'angle

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$$

donc le birapport des quatre points est réel si et seulement si les quatre points sont cocycliques (en vertu du corollaire III.1.20). □

Remarque VI.7.6. Cet énoncé traduit simplement une égalité d'angles en termes d'une condition sur le birapport. Voir des applications spectaculaires dans l'exercice VI.40.

Corollaire VI.7.7. *Toute homographie de la droite projective complexe transforme un cercle ou une droite de* $\mathbf{C}$ *en un cercle ou une droite de* $\mathbf{C}$. □

Remarque VI.7.8. Ce résultat devrait rappeler aux lecteurs le paragraphe sur les inversions planes (c'est-à-dire le § III.4). Remarquons que les droites, comme les cercles, sont les images, *via* la projection stéréographique, des cercles dessinés sur la sphère. C'est pourquoi il est naturel de les appeler *cercles* (de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$). C'est ici qu'on peut apprécier le rôle joué par *cette* complétion du plan : pour qu'une droite ressemble à un cercle, c'est *un* point qu'il faut lui ajouter — mais deux droites ne se coupent qu'en un seul point alors que deux cercles peuvent se couper en deux points. C'est donc *le même point* qu'il faut ajouter à toutes les droites.

Le groupe circulaire

Le corollaire VI.7.7 nous dit donc que les homographies conservent les cercles. Nous savons qu'il en est de même des inversions. Je suppose que toute les lectrices ont compris qu'une inversion n'est *pas* une homographie[5]. C'est pourquoi l'on considère le groupe G de transformations de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ qui est engendré par

– les homographies

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad-bc \neq 0$$

– et la symétrie $z \mapsto \overline{z}$.

Ainsi G contient le groupe projectif $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ et toutes les inversions. Il est habituel de nommer ce groupe *le groupe circulaire*. Cette terminologie sera justifiée par le théorème VI.7.11. Exhibons d'abord un système de générateurs de ce groupe.

Proposition VI.7.9. *Le groupe circulaire G est engendré par les inversions et les réflexions.*

Démonstration. Soit φ un élément de G. Si $\varphi(\infty) = \infty$, φ est une similitude (directe ou indirecte), elle est donc composée d'une homothétie h et d'une isométrie u (proposition III.3.2). Nous savons que u est une composée de réflexions (théorème II.2.2) et que h est une composée d'inversions (proposition III.4.7).

Si $\varphi(\infty) = A$ est dans $\mathbf{C}$, on compose φ avec une inversion I de pôle A et $I \circ \varphi(\infty) = \infty$. On peut alors appliquer ce qui précède. □

On a immédiatement :

Corollaire VI.7.10. *Les éléments de G préservent les angles non orientés.* □

[5] Au cas improbable où ce ne serait pas vrai, se reporter à l'exercice III.49 : dans l'écriture d'une inversion en nombres complexes, il y a des $\overline{z}$.

Démonstration. Les réflexions renversent les angles orientés (proposition III.1.11) et les inversions aussi (corollaire III.4.5). □

Caractérisons maintenant les éléments du groupe circulaire parmi toutes les transformations ponctuelles de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Théorème VI.7.11. *Les éléments de G sont les transformations qui préservent l'ensemble des cercles et droites.*

Démonstration. De la proposition VI.7.9 et des propriétés des réflexions et des inversions (toujours le § III.4) on déduit que les éléments de G transforment cercles et droites en cercles et droites.

Réciproquement, soit $\varphi : \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ une transformation préservant les cercles et droites. Quitte à composer φ avec une homographie, on peut supposer que $\varphi(\infty) = \infty$ et donc que φ est une transformation de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ qui envoie tout cercle sur un cercle et toute droite sur une droite.

On pourrait utiliser maintenant le théorème « fondamental » de la géométrie affine (exercice I.67) pour dire que φ est affine (réelle) et vérifier qu'une transformation affine qui préserve les cercles est une similitude (directe ou indirecte). Si la deuxième étape est facile, la première est beaucoup plus lourde que nécessaire. Utilisons donc une autre méthode (dans laquelle, en fin de compte, on ne démontre que ce qui est nécessaire du théorème fondamental).

Montrons d'abord que l'application φ préserve les divisions harmoniques. La figure 14 représente une construction à la règle de l'unique point d tel que $[a, b, c, d]$ soit égal à -1 dans les cas où les trois points a, b et c ne sont pas alignés, alors que la figure 15 en fait autant dans le cas où ces trois points sont alignés.

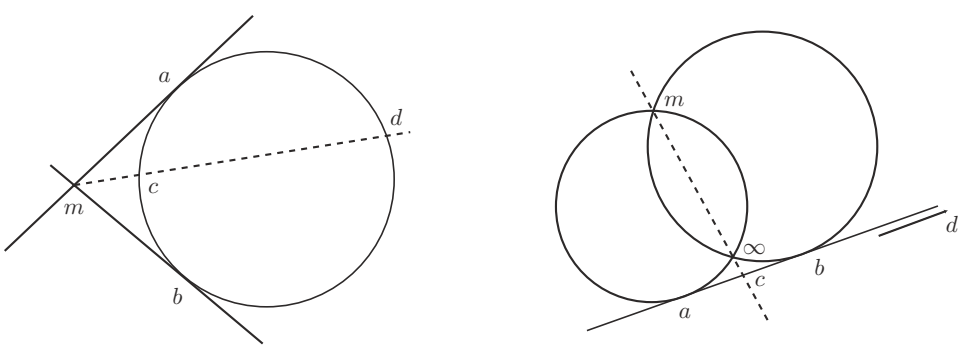


Figure 14

– Si a, b et c ne sont pas alignés (figure 14). On envoie d à l'infini, de sorte que ma et mb deviennent deux cercles qui se coupent en m et en un autre point (image du point à l'infini) et que le cercle abc devient une droite (projective) tangente à ces deux cercles. Le point c est le milieu de l'image de ab, de sorte que le birapport $[a, b, c, d]$ est bien égal à -1.

– Si a, b et c sont alignés (figure 15). On transforme la droite mc en la droite à

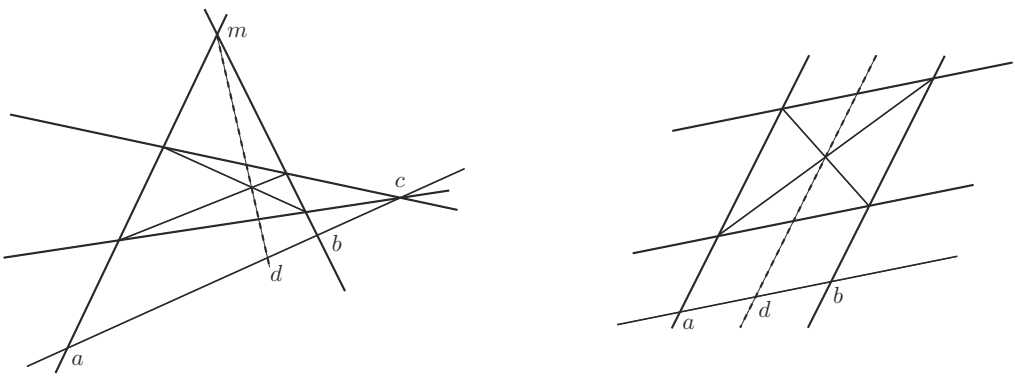


Figure 15

l'infini (cette démonstration se passe dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$), et il reste à constater que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux !

Le théorème résulte alors du lemme suivant.

Lemme VI.7.12. *Soit $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une transformation qui fixe 0 et 1 et préserve les divisions harmoniques. Alors φ est un automorphisme de corps de $\mathbf{C}$.*

Une fois ce lemme admis, on compose φ avec une similitude pour se ramener au cas où elle préserve l'axe réel. Alors, c'est un automorphisme de corps de $\mathbf{C}$ qui préserve $\mathbf{R}$, c'est donc l'identité ou la conjugaison complexe. □

Démonstration du lemme. Rappelons que $[a, b, c, \infty] = -1$ si et seulement si c est le milieu de ab (comme on l'a dit à la fin du § VI.6). Donc φ conserve les milieux :

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}.$$

En particulier, avec $b = 0$ et parce que $\varphi(0) = 0$, on a

$$\varphi(a) = 2\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$$

et donc

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

donc l'application φ est additive. Remarquons maintenant que $[a, -a, a^2, 1] = -1$ pour tout a (vérification immédiate) de sorte que φ préserve aussi les carrés :

$$\begin{aligned} -1 = [a, -a, a^2, 1] &= [\varphi(a), \varphi(-a), \varphi(a^2), \varphi(1)] \\ &= [\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a^2), 1] \end{aligned}$$

puisque φ préserve les divisions harmoniques et fixe 1. Mais on a aussi

$$[\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a)^2, 1] = -1$$

donc

$$[\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a^2), 1] = [\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a)^2, 1]$$

et $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ pour tout nombre complexe a. Enfin :

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right],$$

donc, avec la conservation des milieux et des carrés, l'additivité donne :

$$\varphi(ab) = \frac{1}{4}\left[(\varphi(a)+\varphi(b))^2 - (\varphi(a)-\varphi(b))^2\right] = \varphi(a)\varphi(b)$$

de sorte que φ est bien un automorphisme du corps $\mathbf{C}$. □

On reviendra sur l'ensemble des cercles et droites et sur le groupe circulaire au § VII.6.

Exercices et problèmes

Espaces, sous-espaces, repères projectifs

Exercice VI.1. Soient E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace. En utilisant une base de F complétée en une base de E, trouver une base de $F' \subset E^\star$. En déduire la dimension de F'.

Exercice VI.2. Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{H}(E)$ l'espace des hyperplans vectoriels de E. Montrer qu'il existe une bijection naturelle de $\mathcal{H}(E)$ sur l'espace projectif $P(E^\star)$ associé au dual de E.

Exercice VI.3. À l'aide d'une projection stéréographique, montrer que $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ est homéomorphe à un cercle.

Exercice VI.4. Le complémentaire d'une droite dans un plan affine réel a deux composantes connexes (voir l'exercice I.49). Montrer que le complémentaire d'une droite dans un plan projectif réel est connexe. Qu'en est-il du complémentaire de la droite projective réelle $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$?

Exercice VI.5. Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{F} \subset E$ un sous-espace *affine* ne contenant pas 0. Montrer que la projection

$$p : E - \{0\} \longrightarrow P(E)$$

se restreint en une injection de $\mathcal{F}$ dans $P(E)$.

Exercice VI.6. Montrer que $(m_0, \ldots, m_{n+1})$ est un repère projectif de l'espace projectif $P(E)$ de dimension n si et seulement si, pour tout i, m_i n'est pas dans le sous-espace projectif engendré par les m_j pour $j \neq i$.

Exercice VI.7. Soit H un hyperplan vectoriel fixé d'un espace vectoriel E. Soit E_H l'ensemble des droites vectorielles de E qui ne sont pas contenues dans H. Quel est le complémentaire de E_H dans $P(E)$? Soit $\ell \in E_H$ une droite vectorielle fixée. Montrer qu'il existe une bijection

$$E_H \longrightarrow \mathcal{L}(\ell, H)$$

de E_H sur l'espace des applications linéaires de ℓ dans H.

Exercice VI.8. Démontrer la proposition VI.1.1 dans le cas complexe (attention à la séparation !).

Homographies, dualité et birapports

Exercice VI.9. Soit $g : P(E) \to P(E)$ une homographie. Montrer que si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ou si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et la dimension de $P(E)$ est paire, g a toujours un point fixe. Trouver une homographie $\mathbf{P}_1(\mathbf{R}) \to \mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ sans point fixe.

Exercice VI.10. Soient f et g deux homographies d'une droite ayant chacune deux points fixes distincts. Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont les mêmes points fixes.

Exercice VI.11. Quelles sont les homographies de $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ qui préservent ∞ ? qui préservent 0 et ∞ ? Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{K})$ formé des homographies qui préservent deux points a et b (distincts) est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbf{K}^\star$.

***Exercice VI.12* (Faisceaux de droites).** Un *faisceau de droites* d'un plan projectif P est la famille notée $m^\star$ de toutes les droites passant par un point m. Montrer qu'un faisceau de droites de P est... une droite de $P^\star$.

***Exercice VI.13* (Incidences).** Soit P un plan projectif. Soient D une droite et m un point de P hors de D. Soit $m^\star \subset P^\star$ la droite duale, c'est-à-dire l'ensemble des

droites passant par m (voir le § VI.4 et l'exercice VI.12). On définit l'*application d'incidence*

$$i : m^\star \longrightarrow D$$

en associant, à toute droite passant par m, son point d'intersection avec D. Montrer que i est une homographie.

***Exercice VI.14* (Perspectives).** Soient H et H' deux hyperplans de l'espace projectif $P(E)$, m un point situé ni sur H ni sur H'. Soit x un point de H. Montrer que la droite mx rencontre H' en un point unique, noté $g(x)$. Montrer que g est une homographie. On appelle g la *perspective* de centre m de H sur H' (ou projection de H sur H').

Montrer que, si D et D' sont deux droites du plan projectif P et si m est un point de P situé ni sur D, ni sur D', la perspective de centre m de D sur D' est composée de deux incidences.

***Exercice VI.15* (Pappus, encore (la démonstration la plus projective))**

On reprend les notations de l'énoncé du théorème de Pappus (théorème VI.3.2). Soient O le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, M celui de BC' et $A'C$, N celui de AC' et $A'B$. Considérer la composition

$$f : BC' \longrightarrow \mathcal{D}' \longrightarrow A'B$$

des perspectives de centre C de BC' sur $\mathcal{D}'$ et de centre A de $\mathcal{D}'$ sur $A'B$. Déterminer $f(B)$, $f(M)$, $f(C')$ et $f(\alpha)$. Considérer ensuite la perspective de centre β

$$g : BC' \longrightarrow A'B.$$

Déterminer $g(B)$, $g(M)$ et $g(C')$. Identifier $g(\alpha)$ et conclure.

***Exercice VI.16* (Faisceau de droites (suite)).** Soient d_1, d_2, d_3 et d_4 quatre droites d'un faisceau et soit D une sécante (une droite ne passant pas par m). Soit a_i le point d'intersection de d_i et de D. Montrer que le birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ne dépend pas de la sécante D choisie. On l'appelle birapport des quatre droites et on le note $[d_1, d_2, d_3, d_4]$.

***Exercice VI.17* (Birapport et dualité).** On reprend les notations de l'exercice VI.16. Montrer que le birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ est en fait celui des quatre points d_1, d_2, d_3 et d_4 sur la droite projective $m^\star$.

***Exercice VI.18* (Faisceau harmonique).** On dit que quatre droites concourantes d_1, d_2, d_3 et d_4 d'un plan affine $\mathcal{P}$ forment un *faisceau harmonique* si leur birapport vaut -1. Montrer que, pour que les quatre droites concourantes d_1, d_2, d_3 et d_4

forment un faisceau harmonique, il faut et il suffit qu'une parallèle à d_4 rencontre d_1, d_2 et d_3 en des points a_1, a_2, a_3 tels que a_3 soit le milieu de a_1a_2 (figure 17).

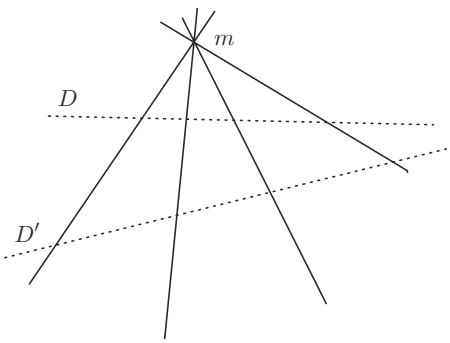


Figure 16. Birapport de quatre droites

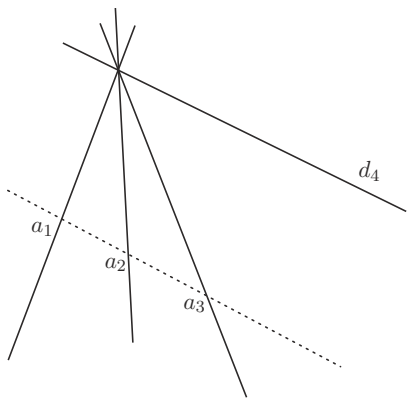


Figure 17. Faisceau harmonique

Exercice VI.19. Sur une droite affine réelle, montrer que si quatre points alignés A, B, C, D forment une division harmonique, un et un seul des points C et D se trouve à l'intérieur du segment $[AB]$.

Exercice VI.20. Dans un plan affine, soient A', B' et C' trois points des côtés BC, CA et AB d'un triangle. La droite $B'C'$ coupe BC en D. Montrer qu'on a l'égalité

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = [C, B, A', D].$$

Montrer que le produit

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

est invariant par homographie.

***Exercice VI.21* (Thalès, le retour).** Quatre droites d, d', d'' et d_0 passent par un point m, deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ rencontrent d_0 en m_1, m_2. Soient $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. Que dit dans un plan affine l'égalité des birapports

$$[A_1, A'_1, A''_1, m_1] = [A_2, A'_2, A''_2, m_2]$$

(démontrée dans l'exercice VI.16) quand d_0 est la droite à l'infini ?

Au chapitre I, on a montré que le théorème de Thalès est une traduction du fait que les projections sont des applications affines. Quelle propriété avez-vous utilisée ici ?

Exercice VI.22. Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en A. On se donne trois points B, C et D sur $\mathcal{D}$, trois points B', C' et D' sur $\mathcal{D}'$. Montrer que les droites BB', CC' et DD' sont concourantes si et seulement si $[A, B, C, D] = [A, B', C', D']$.

Exercice VI.23. Dans un plan affine euclidien, soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O'. La droite OO' rencontre $\mathcal{C}$ en A et B, $\mathcal{C}'$ en M et N. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si $[A, B, M, N] = -1$.

Exercice VI.24. Dans un plan projectif, on considère deux droites D et D' se coupant en un point O et un point A en dehors de $D \cup D'$. Considérer la figure 18 et construire l'unique droite d telle que (D, D', d, OA) soit un faisceau harmonique.

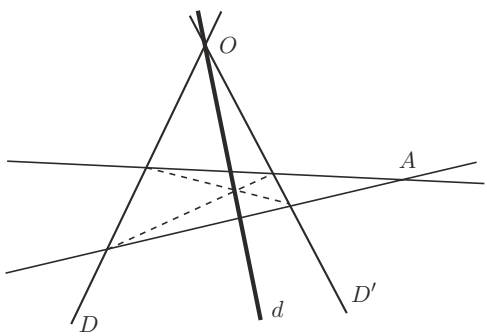


Figure 18

Exercice VI.25. Soit (a, b, c, d) un repère d'un plan projectif. On appelle α l'intersection de ab et cd, β celle de ad et bc, γ celle de ac et bd et enfin δ celle de ac et $\alpha\beta$. Ainsi, les quatre points a, c, γ et δ sont alignés. Montrer que $[a, c, \gamma, \delta] = -1$.

***Exercice VI.26* (Perspective (suite)).** Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, $\mathcal{F}$ un plan de $\mathcal{E}$ et Ω un point hors de $\mathcal{F}$. On projette l'espace $\mathcal{E}$ (privé du plan parallèle à $\mathcal{F}$ passant par Ω) sur $\mathcal{F}$ en associant à $m \in \mathcal{E}$ l'intersection de la droite Ωm avec $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$ ne passant pas par Ω. La projection définit-elle une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{F}$? Quels sont les points de $\mathcal{F}$ qui ne sont image d'aucun point de $\mathcal{P}$?

On complète $\mathcal{E}$ en un espace projectif. Montrer que la projection définit une perspective π du complété de $\mathcal{P}$ sur le complété de $\mathcal{F}$. Quelle est l'image de la droite à l'infini de $\mathcal{P}$?

Dans cet exercice, Ω peut désigner un œil ou l'objectif d'un appareil photographique, $\mathcal{F}$ la cornée ou le film, $\mathcal{P}$ est un plan de l'espace dont on contemple l'image. Si F est une figure dans $\mathcal{P}$, $\pi(F)$ est la figure « vue en perspective ».

Par exemple, on peut considérer une partie de la figure 18 comme un parallélogramme et ses diagonales vus en perspective (c'est clair ?). Dessiner un échiquier (figure 19) en perspective.

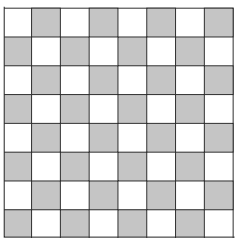


Figure 19

La figure 20 reproduit, avec l'autorisation de François Rouvière, son auteur, qui est aussi celui de **[44]**, une photographie prise pendant l'hiver 1981 sur le plateau de Valensole (Alpes de Haute-Provence). Les pieds de lavande sont disposés aux sommets d'un réseau (comme les coins des cases de l'échiquier) dans le plan horizontal (enneigé). Dans le langage de cet exercice, que représente la ligne d'horizon ? Observer les nombreuses droites parallèles qui se coupent à l'infini. Étant donnés trois pieds de lavande consécutifs de la même rangée, où est le « quatrième harmonique » ?

Figure 20

Exercice VI.27. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ permute les quatre points alignés a, b, c et d, transformant leur birapport. Montrer que le stabilisateur de $[a, b, c, d]$ est le sous-groupe V formé de l'identité et des produits de deux transpositions à supports disjoints. Combien de valeurs prennent les birapports $[\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)]$? Montrer que le quotient $\mathfrak{S}_4/V$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (voir aussi l'exercice V.33).

Exercice VI.28. Quelles sont les homographies de $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ qui fixent 1 et échangent 0 et ∞ ? En déduire une démonstration sans calcul de l'égalité $[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$. Montrer de même les égalités $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice VI.29. Soient a, b, m, n et p cinq points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m] = 1.$$

***Exercice VI.30* (Involutions).** On appelle *involution* une homographie g qui n'est pas l'identité et telle que $g^2 = \mathrm{Id}$. Montrer qu'une homographie g d'une droite projective est une involution si et seulement si il existe deux points p et p' (distincts) sur cette droite et tels que $g(p) = p'$ et $g(p') = p$.

On donne deux séries de trois points distincts a_i et a'_i $(1 \leq i \leq 3)$ d'une droite projective. Soit f l'unique homographie de cette droite qui envoie a_i sur a'_i. Montrer que f est une involution si et seulement si

$$j = 1, 2, 3 \quad \Longrightarrow \quad [a_1, a_2, a_3, a'_j] = [a'_1, a'_2, a'_3, a_j].$$

Soit g une homographie involutive d'une droite projective réelle dans elle-même. Montrer que si g a un point fixe, alors elle en a exactement deux. On les note a et b. Montrer que, pour tout point m de la droite, on a $[a, b, m, g(m)] = -1$.

Exercice VI.31. Pour chacune des parties de $\mathbf{C}$ suivantes, décrire son image par les homographies indiquées[(6)] :

– Le premier quadrant ($x > 0$ et $y > 0$) par

$$z \longmapsto \frac{z - i}{z + i}.$$

– Le demi-disque $|z| < 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ par

$$z \longmapsto \frac{2z - i}{2 + iz}.$$

[(6)] Cet exercice est copié dans **[50]**.

– Le secteur $x > 0$, $y > 0$ et $y < x$ par

$$z \longmapsto \frac{z}{z-1}.$$

– La bande $0 < x < 1$ par

$$z \longmapsto \frac{z-1}{z} \text{ et par } z \longmapsto \frac{z-1}{z-2}.$$

***Exercice VI.32* (Photographie aérienne).** On considère trois hyperplans H, H_1 et H_2 d'un espace projectif $P(E)$ ainsi que deux points m_1 et m_2. On suppose que m_i n'est ni sur H, ni sur H_i et on appelle g_i la perspective de centre m_i de H sur H_i (voir l'exercice VI.14). Que peut-on dire de $g_2 \circ g_1^{-1} : H_1 \to H_2$? Imaginons maintenant (en dimension 3) que H soit une partie (supposée plane) de la Terre, m_1 et m_2 les objectifs de deux appareils photographiques situés dans deux avions et H_1 et H_2 les plans des films de ces appareils. En utilisant quatre points de H (arbres, monuments, *etc.*) expliquer comment recoller les deux clichés obtenus[(7)].

Exercice VI.33. Quel est l'énoncé dual de celui du théorème de Pappus (théorème VI.3.2) ?

Exercice VI.34. On donne deux points sur une feuille de papier et une règle... très courte. Tracer avec cette règle la droite joignant les deux points.

Exercice VI.35. Dans cet exercice, on considère le corps $\mathbf{F}_q$ à q éléments. Combien le groupe $\mathrm{GL}(2;\mathbf{F}_q)$ a-t-il d'éléments ? Et le groupe $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_q)$? Et la droite projective $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_q)$?

Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes

$$h : \mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_q) \longrightarrow \mathfrak{S}_{q+1}.$$

Montrer que h est un isomorphisme quand $q = 2$ ou 3. Pensez-vous que ce soit le cas en général ?

On considère le sous-groupe $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{F}_3) \subset \mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_3)$ (quotient de $\mathrm{SL}(2;\mathbf{F}_3)$ par son centre). Combien a-t-il d'éléments ? Montrer que h induit un isomorphisme de $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{F}_3)$ sur un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ que l'on déterminera.

Applications à la géométrie euclidienne

Exercice VI.36. Dans un plan affine euclidien, soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes, Δ et Δ' leurs bissectrices. Montrer que $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, Δ et Δ' forment un faisceau harmonique.

(7) Voir par exemple une application « pratique » dans [**5**].

Réciproquement, si $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, Δ et Δ' forment un faisceau harmonique et si Δ et Δ' sont perpendiculaires, montrer que Δ et Δ' sont les bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Retrouver le résultat de l'exercice III.23.

***Exercice VI.37* (Deuxième théorème de Desargues).** On donne un triangle ABC, une droite d ne passant pas par ses sommets et trois points distincts P, Q et R de d. Soient P', Q' et R' les points d'intersection de d avec les droites BC, CA et AB. Montrer que les droites AP, BQ et CR sont concourantes si et seulement si il existe une involution de d qui envoie P sur P', Q sur Q' et R sur R'.

***Exercice VI.38* (Orthogonalité en géométrie projective).** Le plan affine réel est supposé euclidien. On le complète en un plan projectif. Montrer que la relation d'orthogonalité des directions de droites définit une homographie involutive de la droite à l'infini.

***Exercice VI.39* (L'orthocentre, démonstration projective).** Soit ABC un triangle d'un plan affine euclidien. En utilisant le deuxième théorème de Desargues (exercice VI.37) et l'involution définie sur la droite à l'infini par l'orthogonalité (exercice VI.38), montrer que ses trois hauteurs sont concourantes.

***Exercice VI.40* (Le théorème des six birapports et ses applications)**

Soient A, B, C, D, A', B', C' et D' huit points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité

$$[A,B,C',D'][B,C,A',D'][C,A,B',D'][A',B',C,D][B',C',A,D][C',A',B,D]=1.$$

Systèmes cubiques. Appelons *système cubique* la donnée d'un ensemble $\mathcal{X}$ à huit éléments et de trois parties à quatre éléments $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{X}$ telles que

- les parties $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\cap\mathcal{A}$ sont distinctes et ont chacune deux éléments,
- l'intersection $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ contient un unique élément.

Les six parties $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}-\mathcal{A}$, $\mathcal{X}-\mathcal{B}$, $\mathcal{X}-\mathcal{C}$ sont appelées *faces* du système.

Montrer que, si $\mathcal{X}$ est l'ensemble des sommets d'un cube et si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont (les ensembles de sommets de) trois faces passant par un même sommet, $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ est un système cubique. Montrer que l'on peut nommer les éléments de $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X}=\left\{a,b,c,d,a',b',c',d'\right\}$$

de telle façon que l'on ait

$$\mathcal{A}=\left\{b,c,a',d'\right\},\quad \mathcal{B}=\left\{c,a,b',d'\right\},\quad \mathcal{C}=\left\{a,b,c',d'\right\}.$$

Réciproquement, montrer que tout système cubique est en bijection avec un système cubique de cette forme (d'où la terminologie).

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ un système cubique de points de $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Montrer que si cinq des faces de $\mathcal{X}$ sont formées de points cocycliques ou alignés, il en est de même de la sixième.

Applications. Retrouver les résultats des exercices III.31 (le théorème de Miquel), III.32 (la droite de Simson) et III.34 (le pivot)[8].

Exercices un peu plus théoriques

***Exercice VI.41* (Grassmanniennes).** Dans cet exercice, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère l'ensemble (la *grassmannienne*[9]) $G_k(\mathbf{K}^n)$ de tous les sous-espaces vectoriels de dimension k dans $\mathbf{K}^n$. Montrer qu'on peut considérer $G_k(\mathbf{K}^n)$ comme un quotient de l'ensemble des k-uplets de vecteurs indépendants dans $\mathbf{K}^n$ et en profiter pour le munir d'une topologie[10]. Montrer que $G_k(\mathbf{K}^n)$ est un espace topologique compact.

Montrer que les droites projectives de $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ forment un espace topologique compact.

***Exercice VI.42* (Droites affines).** Le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble des droites affines d'un espace affine réel.

(1) À quoi l'espace des droites vectorielles orientées de $\mathbf{R}^{n+1}$ est-il homéomorphe ?

(2) Soit D_n l'ensemble de toutes les droites affines de $\mathbf{R}^n$. On plonge $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ comme l'hyperplan affine $x_{n+1} = 1$ (et comme d'habitude). Montrer que D_n peut être considéré comme un sous-ensemble de l'ensemble des droites projectives de $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ considéré dans l'exercice VI.41. On le munit ainsi d'une topologie. Est-il compact ? Quel est son complémentaire ?

(3) Soit $\widetilde{D}_n$ l'ensemble des droites affines orientées de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe une bijection

$$\widetilde{D}_n \longrightarrow \{(p, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid \|p\| = 1 \text{ et } p \cdot u = 0\}.$$

On le munit ainsi d'une topologie.

[8] Le texte de cet exercice est dû à Daniel Perrin.

[9] Du nom de Grassmann.

[10] On peut aussi munir la grassmannienne d'une topologie en la considérant comme une partie de l'espace projectif $P(\Lambda^k \mathbf{K}^n)$, où Λ^k désigne la k-ième puissance extérieure, en associant au sous-espace E de $\mathbf{K}^n$ la droite engendrée par $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$, pour une base quelconque $(x_1, \ldots, x_k)$ de E... c'est la même topologie, un autre exercice, et le *plongement de Plücker*.

(4) Montrer qu'en considérant tous ces espaces, on obtient un diagramme commutatif (dans lequel toutes les applications sont continues) :

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{D}_n & \longrightarrow & D_n & \subset G_2(\mathbf{R}^{n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow & \\ S^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{P}_n(\mathbf{R}) & \end{array}$$

Exercice VI.43. Montrer que l'ensemble des droites affines du plan affine $\mathbf{K}^2$ s'identifie au complémentaire d'un point dans le plan projectif $\mathbf{P}_2$.

***Exercice VI.44* (Coordonnées barycentriques et repères projectifs)**

On donne trois points non alignés A, B et C d'un plan affine $\mathcal{P}$. Tout point M de $\mathcal{P}$ possède des coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C). À quelle condition un triplet (x, y, z) de scalaires est-il un système de coordonnées barycentriques pour un certain point M ? À quelle condition deux systèmes (x, y, z) et (x', y', z') déterminent-ils le même point de $\mathcal{P}$?

Soit O un point de coordonnées barycentriques (x_0, y_0, z_0). À quelles conditions les quatre points (O, A, B, C) forment-ils un repère projectif du plan projectif complété de $\mathcal{P}$?

***Exercice VI.45* (Coordonnées barycentriques et repères projectifs, suite)**

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit (u, v, w) une base de E. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine de E engendré par ces trois vecteurs. Le plan projectif $P(E)$ est muni du repère projectif

$$(p(u + v + w), p(u), p(v), p(w)) = (O, A, B, C).$$

On considère $\mathcal{P}$ comme une partie de $P(E)$ (voir au besoin l'exercice VI.5). Montrer que (A, B, C) est un repère affine de $\mathcal{P}$ et que le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$ (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) est le point de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées homogènes dans le repère (O, A, B, C) sont $[\alpha, \beta, \gamma]$.

***Exercice VI.46* (Le théorème « fondamental » de la géométrie projective)**

Soient $P(E)$ et $P(E')$ deux espaces projectifs réels de même dimension $n \geq 2$. Soit $f : P(E) \to P(E')$ une bijection telle que, si A, B et C sont alignés, alors $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ le sont aussi. Montrer que f est une homographie.

Exercice VI.47. Dans chacune des descriptions de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ données au § VI.7, retrouver la droite projective réelle $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$.

Exercice VI.48. On veut montrer qu'il n'y a pas de façon continue de choisir une orientation des droites d'un espace vectoriel réel orienté de dimension $n \geq 2$.

Montrer qu'un tel choix donnerait une application continue de $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{R})$ dans la sphère unité telle que la composition

$$\mathbf{P}_{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \xrightarrow{p} \mathbf{P}_{n-1}$$

soit l'identité et un homéomorphisme de S^{n-1} dans $\mathbf{P}_{n-1} \times \{\pm 1\}$. Conclure.

***Exercice VI.49* (Topologie du plan projectif réel).** On a vu (exercice VI.3) que $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ est homéomorphe à un cercle et (voir le § VI.7) $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ à une sphère de dimension 2. Le but de cet exercice est d'étudier $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ — qui est nettement plus compliqué.

(1) Montrer que

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{R}) = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} / (x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$$

et que $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ est le quotient d'un hémisphère par la relation d'équivalence qui identifie deux points antipodaux de l'équateur (figure 21).

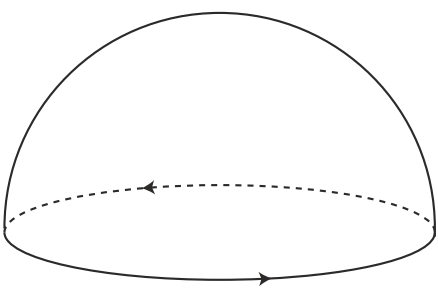


Figure 21

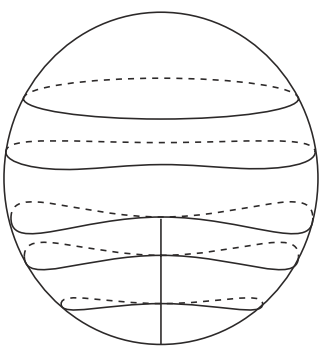


Figure 22

Si on essaie d'imaginer[11] ce recollement dans notre espace de dimension 3, on peut penser à la figure 22. Critiquer cette figure.

(2) On retire la calotte sphérique D image dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ de

$$\left\{(x, y, z) \middle| \, |z| \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Vérifier que D est homéomorphe à un disque et montrer que $\mathbf{P}_2 - D$ est homéomorphe à

$$M = \mathbf{U} \times \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right[/ (u, t) \sim (-u, -t).$$

[11] Voir **[27]** et **[1]** pour de belles images de différentes représentations de $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

(3) Étude de M. Montrer que la première projection

$$\mathbf{U} \times]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\longrightarrow \mathbf{U}$$

définit une application continue $p : M \to \mathbf{U}$ dont toutes les « fibres » $p^{-1}(u)$ sont des intervalles $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Ainsi M est une sorte de cylindre. Montrer que l'image du cercle par

$$\mathbf{U} \times \{0\} \subset \mathbf{U} \times]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\xrightarrow{p} M$$

est homéomorphe à un cercle (c'est l'image d'un $\mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_2$) mais que le complémentaire de ce cercle dans M est connexe ! On peut en déduire que M n'est pas homéomorphe à un cylindre, c'est une *bande de Möbius* (voir aussi l'exercice IX.20).

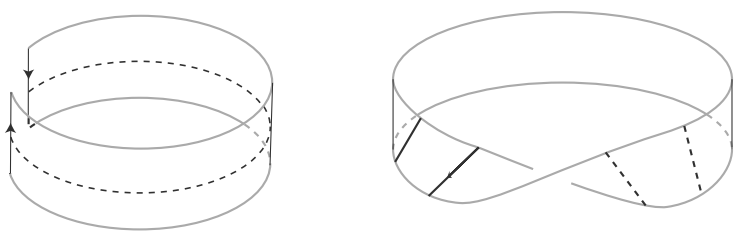


Figure 23

(4) Montrer que M est homéomorphe au quotient de $[0, \pi] \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par la relation d'équivalence qui identifie $(0, t)$ et $(\pi, -t)$ (ce que symbolisent les flèches sur la figure 23).

En conclusion : $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ s'obtient en recollant un disque D le long du bord à une bande de Möbius.

***Exercice VI.50* (Retour à $\mathrm{O}^+(3)$).** En utilisant l'exercice V.55, montrer que $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}^+(3)$.

***Exercice VI.51* (Automorphismes du disque).** Dans cet exercice, D désigne le disque unité

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$$

de $\mathbf{C}$ et le mot « automorphisme » désigne une bijection biholomorphe. En utilisant le lemme de Schwarz[12], montrer que tout automorphisme de D qui fixe 0 est une rotation.

[12] Voir au besoin [**11**] ou [**50**].

Si a et b sont des nombres complexes tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$, montrer que l'application définie par

$$z \longmapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$$

est un automorphisme de D. Si $w \neq 0$ est un point de D, trouver une homographie qui préserve D et envoie w sur 0. En déduire que tout automorphisme de D est une homographie dont on précisera la forme.

Trouver une homographie qui envoie D sur le demi-plan supérieur H. En déduire que tout automorphisme de H est une homographie de la forme

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{avec } a, b, c \text{ et } d \text{ réels et } ad - bc > 0.$$

***Exercice VI.52* (Le demi-plan de Poincaré).** Soit $H \subset \mathbf{C}$ le demi-plan supérieur ($\operatorname{Im} z > 0$). On appelle « droites » de H les demi-cercles centrés sur l'axe des x et les demi-droites orthogonales à l'axe des x (figure 24). On dit que deux « droites » sont parallèles si elles ne se rencontrent pas.

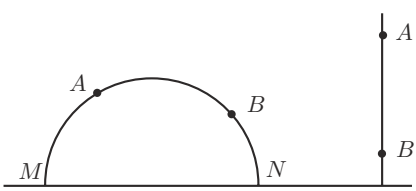


Figure 24

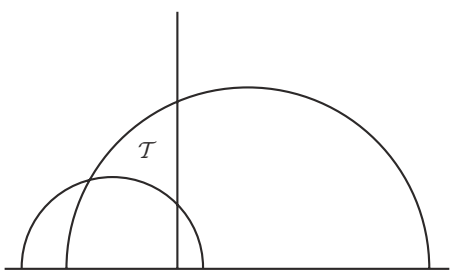


Figure 25

(1) Vérifier que par deux points, il passe une et une seule « droite » et que, par un point extérieur à une « droite », il passe une infinité de parallèles à cette « droite » [13].

(2) Si A, $B \in H$, la « droite » AB est un demi-cercle de diamètre MN ou une demi-droite orthogonale à l'axe des x en M (remarquer que M et N ne sont pas des points de H). On pose

$$d(A,B) = \begin{cases} |\log[A,B,M,\infty]| & \text{dans le premier cas} \\ |\log[A,B,M,N]| & \text{dans le deuxième} \end{cases}$$

[13] Ce modèle de géométrie non euclidienne plongée dans la géométrie euclidienne a été imaginé par Poincaré pour montrer l'indépendance du postulat des parallèles des autres axiomes de la géométrie euclidienne.

(où log désigne, bien sûr, le logarithme népérien). Montrer que $d(A, B)$ est un nombre réel positif bien défini (qu'il ne dépend que de A et B) et que d définit une distance sur H.

(3) On appelle angle de deux « droites » leur angle géométrique au sens euclidien. Que peut-on dire de la somme des angles d'un triangle $\mathcal{T}$ (figure 25) ?

(4) Montrer que le sous-groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ du groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ des homographies de $\mathbf{C}$ opère sur H en préservant les distances et les angles[14].

(5) Construire un hexagone régulier dans H dont tous les angles soient droits.

[14] Dans l'exercice VI.51, on montre que les homographies réelles sont les seules homographies qui préservent H, on peut aussi montrer que ce sont toutes les isométries directes de (H, d).

VII

CONIQUES ET QUADRIQUES

Ce chapitre est consacré aux quadriques et surtout aux coniques. J'ai essayé de garder un équilibre entre

– les aspects algébriques : une quadrique est définie par une équation de degré 2, ce qui a des conséquences...

– les aspects géométriques : une conique du plan euclidien est susceptible d'une définition strictement métrique... et ceci aussi a des conséquences.

Les deux premières parties du chapitre sont élémentaires et dévolues respectivement à ces deux aspects des coniques affines.

Pour les lecteurs plus avancés, j'en viens ensuite seulement aux coniques et quadriques projectives. J'étudie les propriétés liées à la définition algébrique, polarité et dualité notamment, j'ébauche le lien avec les homographies, autour du théorème de Pascal et je montre que les propriétés affines *et* métriques des coniques affines peuvent se déduire du traitement projectif.

Dans une dernière partie, je montre comment les résultats des §§ III.4 et VI.7 sur les faisceaux de cercles et les inversions se racontent très simplement en observant les droites couper une quadrique d'un espace de dimension 3. J'inclus aussi dans ce chapitre un appendice de rappels sur les formes quadratiques et quelques exercices de « mise en forme ».

VII.1. Quadriques et coniques affines, généralités

Notations

Le corps de base est $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (le plus souvent) ou $\mathbf{C}$. J'utiliserai en même temps une forme quadratique q, sa forme polaire φ et l'application linéaire $\widetilde{\varphi} : E \to E^\star$ qu'elle détermine (voir au besoin le § VII.7).

Plaçons-nous dans un espace affine $\mathcal{E}$. Commençons par un problème (assez fondamental en mathématiques) : doit-on définir une quadrique comme un ensemble de points satisfaisant une équation ou comme cette équation elle-même ? On a envie de *définir* une quadrique affine comme l'ensemble des points vérifiant une équation du second degré

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = 0\}$$

où f est un *polynôme de degré* 2, c'est-à-dire qu'il existe un point O, une forme quadratique non nulle q, une forme linéaire L_O et une constante c_O tels que

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O.$$

On remarquera que la forme de l'expression ne dépend pas du point O choisi : si O' est un autre point,

$$\begin{aligned} f(M) &= q(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) + L_O(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) + c_O \\ &= q(\overrightarrow{O'M}) + (2\varphi(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{O'M}) + L_O(\overrightarrow{O'M})) + (q(\overrightarrow{OO'}) + L_O(\overrightarrow{OO'}) + c_O) \\ &= q(\overrightarrow{O'M}) + L_{O'}(\overrightarrow{O'M}) + c_{O'}. \end{aligned}$$

Ce calcul montre aussi que la partie quadratique du polynôme, c'est-à-dire la forme q, ne dépend pas non plus du point O. La forme linéaire et la constante, elles, en dépendent.

Remarque VII.1.1. Je viens de définir ce qu'était un polynôme du second degré sans écrire de monôme ! Si, au lieu d'une origine O, on choisit tout un repère, le polynôme f s'écrit, dans les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ associées

$$f(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{M}) = \underbrace{\sum a_{i,j} x_i x_j}_{q(\overrightarrow{OM})} + \underbrace{\sum b_i x_i}_{L(\overrightarrow{OM})} + c.$$

C'est bien ce que toutes les lectrices sont certainement d'accord pour appeler un polynôme du second degré.

La définition donnée n'est pas absolument satisfaisante au regard des questions de classification. Considérons par exemple, dans un plan affine réel muni d'un repère, les équations

- d'une part, $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
- de l'autre $x^2 + 1 = 0$.

Bien entendu, elles définissent le même ensemble de points (l'ensemble vide !). Pourtant, il n'est pas très raisonnable de les considérer comme équivalentes : si on les considère dans un plan *complexe*, l'une décrit une authentique conique, l'autre deux droites parallèles.

Il est donc préférable[1] de considérer le polynôme f plutôt que les points qu'il définit. Bien entendu, deux équations proportionnelles f et λf ($\lambda \neq 0$) devront être considérées comme équivalentes.

Définition VII.1.2. On appelle *quadrique affine* la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : \mathcal{E} \to \mathbf{K}$ sous la relation « $f \sim g$ si et seulement si g est un multiple scalaire de f ». Une quadrique plane est appelée *conique*. L'ensemble des points de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation $f(M) = 0$ est l'*image* de la quadrique.

Remarque VII.1.3. J'insiste : le polynôme f est du second degré, c'est-à-dire, sa partie quadratique q n'est pas nulle.

Toujours dans un plan affine muni d'un repère, on voudra aussi faire une différence entre des équations telles que $xy = 0$ (qui décrit deux droites sécantes) ou $x^2 = 0$ (qui décrit une droite, dite double) et $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ou $x^2 - y = 0$ (qui décrivent de « vraies » coniques).

On pourrait être tenté de demander que la forme quadratique q qui apparaît dans l'équation f soit non dégénérée, mais c'est le cas pour xy (qu'on veut éviter) et pas pour $x^2 - y$ (qu'on veut autoriser). La solution[2] est d'ajouter une variable.

Définition VII.1.4. La quadrique de l'espace affine $\mathcal{E}$ définie par le polynôme

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

est dite *propre* si la forme quadratique définie sur $E \times \mathbf{K}$ par

$$Q(u, z) = q(u) + L(u)z + cz^2$$

est non dégénérée. Cette forme quadratique est dite *homogénéisée* de q.

Remarque VII.1.5. Changer de point O revient à remplacer $Q(u, z)$ par

$$Q'(u, z) = Q(u + z\overrightarrow{OO'}, z).$$

La forme Q' est donc $Q' = Q \circ \varphi$, où φ est l'isomorphisme de $E \times \mathbf{K}$ dans lui-même défini par

$$\varphi(u, z) = (u + z\overrightarrow{OO'}, z).$$

La non-dégénérescence de Q' est donc équivalente à celle de Q (voir la remarque VII.7.3), la notion de quadrique propre est donc bien définie.

---

[1] Ce type de problème, tout élémentaire qu'il soit, est à la base de la géométrie algébrique moderne. Sur un corps algébriquement clos comme $\mathbf{C}$, il est en fait équivalent de donner l'équation de la quadrique ou l'ensemble des points qui la vérifient, c'est un cas simple du *Nullstellensatz*, voir l'exercice VII.45.

[2] Qui ne devrait pas sembler artificielle aux lecteurs « projectifs ».

Exemples VII.1.6. Revenons aux exemples mentionnés ci-dessus. Pour $f = xy$, la forme quadratique homogénéisée est $Q = xy$; pour $f = x^2$, c'est $Q = x^2$, qui sont toutes les deux des formes quadratiques *dégénérées* en les trois variables (x, y, z) ; pour $x^2 + y^2 - 1$ on trouve $x^2 + y^2 - z^2$ et pour $x^2 - y$, $x^2 - yz$, qui sont toutes les deux non dégénérées.

Intersection d'une quadrique et d'une droite

Comme l'équation d'une quadrique est de degré 2, chercher les points d'intersection de l'image d'une quadrique et d'une droite mène à résoudre une équation du second degré (figure 1). Considérons en effet une droite D dirigée par un vecteur u et passant par un point A. D'après le calcul qui précède, l'équation de la quadrique $\mathcal{C}$ peut s'écrire (le point A est fixé) :

$$q(\overrightarrow{AM}) + L_A(\overrightarrow{AM}) + c_A = 0$$

et le point M est sur la droite D si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \lambda u$ pour un certain scalaire λ.

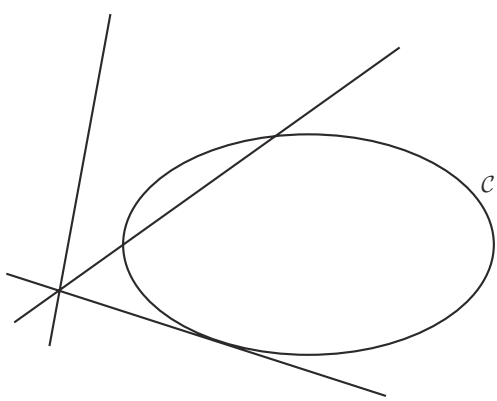


Figure 1. Intersection d'une droite et d'une conique

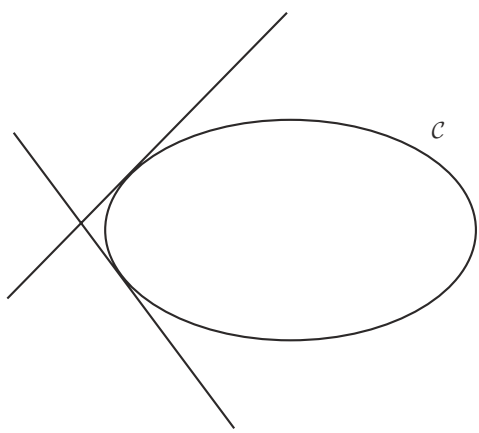


Figure 2. Tangentes à une conique

L'intersection est donc formée des points M de la droite définis par les racines de l'équation en λ

$$\lambda^2 q(u) + \lambda L_A(u) + c_A = 0.$$

La droite est entièrement contenue dans l'image de la quadrique quand

$$q(u) = L_A(u) = c_A = 0.$$

Elle la rencontre en un unique point (simple[3]) quand $q(u) = 0$ et $L_A(u) \neq 0$. Quand $q(u) \neq 0$, la droite D rencontre $\mathcal{C}$

– en deux points (on dit qu'elle est *sécante*) si l'équation du second degré a deux racines distinctes,

– en un unique point (double) si elle a une racine double, c'est-à-dire si

$$L_A(u)^2 - 4c_A q(u) = 0,$$

– (seulement quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) en aucun point si cette équation n'a pas de racine réelle.

Droites tangentes à une quadrique

Dans le cas de la racine double, on a envie de dire que la droite est *tangente* à la quadrique. Vérifions qu'elle lui est bien tangente au sens de la géométrie différentielle.

Remarquons d'abord que, si $A \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire si $c_A = 0$, la droite passant par A et dirigée par u rencontre $\mathcal{C}$ en les points M tels que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \lambda u \\ \lambda(\lambda q(u) + L_A(u)) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire en A (pour $\lambda = 0$) et, si $q(u) \neq 0$, en un autre point défini par

$$\lambda = -\frac{L_A(u)}{q(u)}.$$

Ce deuxième point coïncide avec A si et seulement si $L_A(u) = 0$.

Proposition VII.1.7. *Pour qu'une droite rencontre une quadrique $\mathcal{C}$ en un unique point double A ou soit contenue dans $\mathcal{C}$ il faut et il suffit qu'elle soit tangente en A à $\mathcal{C}$ au sens de la géométrie différentielle.*

Démonstration. Soit D la droite passant par A et dirigée par u. Remarquons d'abord qu'on a, pour tout point M,

$$(df)_M(u) = 2\varphi(\overrightarrow{AM}, u) + L_A(u)$$

grâce à la forme particulière[4] de f. En $M = A$, on a donc

$$(df)_A(u) = L_A(u).$$

[3] Il y a un autre point d'intersection à l'infini, comme le découvriront les lectrices du § VII.3 et/ou ceux qui feront l'exercice VII.43.

[4] Rappelons — voir au besoin le § VII.7 — que $dq_x(y) = 2\varphi(x, y)$.

Ce qui donne l'équivalence $L_A(u) = 0$ si et seulement si $(df)_A(u) = 0$. La première égalité exprime le fait que D rencontre $\mathcal{C}$ en l'unique point double A. La deuxième, quant à elle, exprime le fait que D est contenue dans l'hyperplan tangent à la quadrique $\mathcal{C}$ (voir au besoin la proposition IX.2.11). □

Remarque VII.1.8. Pour ceux de nos lecteurs qui seraient peu familiers avec la géométrie différentielle en dimension trop grande, identifions, dans le cas d'une conique, le noyau de $(df)_A$ aux vecteurs dirigeant la tangente en A. On paramètre la conique (au voisinage de A) par une application différentiable $t \mapsto M(t)$ définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$ et telle que $M(t)$ soit sur $\mathcal{C}$ pour tout t avec $M(t_0) = A$. Comme le point $M(t)$ est sur $\mathcal{C}$ pour tout t, donc $f(M(t))$ est identiquement nulle. On dérive cette relation par rapport à t pour trouver, en t_0

$$0 \equiv \frac{d}{dt}(f(M(t))) = df_A\left(\frac{dM}{dt}\right) = 2\varphi\left(\overrightarrow{AM(t_0)}, \frac{dM}{dt}\right) + L_A\left(\frac{dM}{dt}\right),$$

ce qui, comme $M(t_0) = A$, dit bien que $L_A(u) = 0$.

Tangentes à une conique

Plaçons-nous maintenant dans le cas du plan. De même qu'en général une droite rencontre une conique en deux points (réels ou imaginaires), d'un point du plan on peut mener deux tangentes à une conique (figure 2). Fixons un point B et cherchons les vecteurs u tels que la droite passant par B et dirigée par u soit tangente à $\mathcal{C}$. C'est dire que u est solution de l'équation

$$L_B(u)^2 - 4c_B q(u) = 0.$$

Comme L_B est une forme linéaire, q une forme quadratique et c_B une constante, il s'agit des vecteurs u isotropes pour la forme *quadratique* $L_B^2 - 4c_B q$. On cherche ici des vecteurs directeurs de droites, donc des vecteurs non nuls, et deux vecteurs colinéaires définissent la même droite. Il y a donc, en général, deux droites solutions, peut-être imaginaires (voir des précisions dans les exercices VII.17 et, de façon plus intrinsèque, VII.73).

Quadriques à centre

Le calcul exprimant $f(M)$ en termes de différents points O, O' ci-dessus donne envie de voir si on peut trouver un point particulier pour lequel il n'y a pas de terme linéaire dans l'expression donnant f : existe-t-il un point Ω dans $\mathcal{E}$ tel que

$$f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + c' \,?$$

Remarque VII.1.9. Si c'est le cas, on a $c' = f(\Omega)$ et $f(M) - f(\Omega) = q(\overrightarrow{\Omega M})$. Si M' est le symétrique de M par rapport à Ω, on a

$$f(M') - f(\Omega) = q(\overrightarrow{\Omega M'}) = q(-\overrightarrow{\Omega M}) = q(\overrightarrow{\Omega M}) = f(M) - f(\Omega)$$

donc $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $M' \in \mathcal{C}$: Ω est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

Définition VII.1.10. On dit qu'un point Ω tel que $L_\Omega = 0$ est un *centre* pour la quadrique. Quand il y a un centre *unique*, on dit que la quadrique est une *quadrique à centre*.

Théorème VII.1.11. *Pour qu'une quadrique affine soit une quadrique à centre, il faut et il suffit que la partie quadratique q d'un des polynômes qui la définissent soit non dégénérée.*

Remarque VII.1.12. C'est bien de la forme initiale q qu'il est question ici, pas de la forme homogénéisée Q.

Démonstration. On suppose donné un point O tel qu'une équation de $\mathcal{C}$ soit de la forme

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

et (compte-tenu du calcul effectué au tout début de ce paragraphe) on cherche un point Ω tel que

$$2\varphi(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{\Omega M}) + L(\overrightarrow{\Omega M}) = 0.$$

Autrement dit, on cherche un point Ω et les vecteurs $u = \overrightarrow{O\Omega}$ tels que

$$(\forall\, x \in E) \quad \varphi(u, x) = -\frac{1}{2}L(x)$$

ou, plus abstraitement mais de façon équivalente, tel que

$$\widetilde{\varphi}(u) = -\frac{1}{2}L \in E^\star.$$

Pour que cette équation ait une solution u unique, il faut et il suffit que $\widetilde{\varphi} : E \to E^\star$ soit injective, c'est-à-dire que q soit non dégénérée. □

Remarques VII.1.13. D'abord, voilà une application simple et de bon goût de la définition (abstraite) de la non-dégénérescence.

Ensuite, cette démonstration donne des résultats un peu plus précis que le strict énoncé du théorème. Il se peut que q soit dégénérée et que L ne soit pas dans l'image de $\widetilde{\varphi}$, auquel cas il n'y a pas de centre. On verra que c'est ce qui se passe pour les paraboles par exemple. Mais il se peut aussi que q soit dégénérée mais que L soit dans l'image de $\widetilde{\varphi}$, auquel cas les centres forment un sous-espace

affine. C'est ce qui se passe par exemple pour les coniques formées de deux droites parallèles.

VII.2. Classification et propriétés des coniques affines

Dans ce paragraphe, on étudie les coniques d'un plan affine *réel* $\mathcal{E}$.

Classification euclidienne des coniques affines

Supposons d'abord[5] que $\mathcal{E}$ soit euclidien. La classification euclidienne des coniques repose sur l'orthogonalisation simultanée de la forme quadratique q et du produit scalaire euclidien, c'est-à-dire sur la « diagonalisation » de q dans une base orthonormée (voir si nécessaire le théorème VII.7.8).

On énonce d'habitude le premier résultat de classification ainsi :

Proposition VII.2.1. *Une conique propre à centre (d'image non vide) s'écrit, dans un repère orthonormé d'origine le centre*

- *soit* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *(la conique est alors une ellipse),*
- *soit* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *(la conique est une hyperbole)*

pour deux nombres réels positifs a et b (tels que $0 < b \leq a$ si la conique est une ellipse).

Expliquons pourquoi il s'agit bien d'un résultat de *classification* : la proposition décrit les orbites de l'ensemble des coniques propres à centre pour l'opération du groupe des isométries affines du plan. Dire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la conique a telle ou telle équation, c'est dire qu'il existe une isométrie qui envoie notre conique sur la conique définie par cette équation type. Toute conique propre à centre est donc isométrique à une ellipse ou une hyperbole de la forme ci-dessus.

De plus deux coniques propres à centre sont isométriques si et seulement si elles sont de même type et si les nombres a et b correspondants coïncident.

Démonstration de la proposition. On a dit qu'un centre unique veut dire une forme quadratique q non dégénérée. Dans un repère orthonormé d'origine le centre, qui est en même temps orthogonal pour la forme quadratique (dont l'existence est

[5] Une fois n'est pas coutume.

assurée par le théorème d'orthogonalisation simultanée, ici le théorème VII.7.8), l'équation de la conique est de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + c = 0,$$

avec α et β non nuls. Comme la conique est propre, la forme quadratique homogénéisée Q, qui s'écrit

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + cz^2,$$

est non dégénérée, donc c n'est pas nul. On peut donc écrire l'équation sous la forme

$$-\frac{\alpha}{c}x^2 - \frac{\beta}{c}y^2 = 1.$$

Si les deux coefficients sont strictement négatifs, la conique est vide ; s'ils sont strictement positifs, on a bien l'équation d'une ellipse (figure 3) ; s'ils sont de signes opposés, c'est une hyperbole (figure 4). □

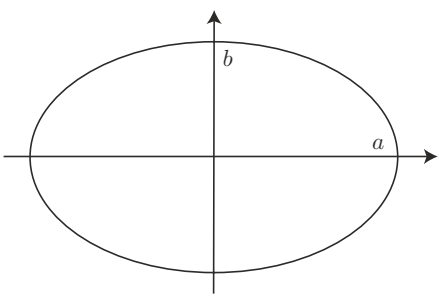


Figure 3. Ellipse

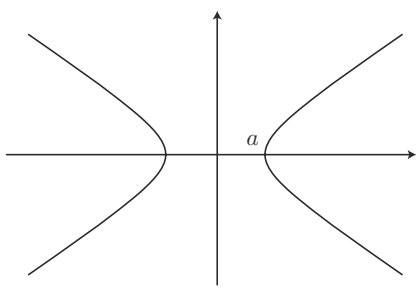


Figure 4. Hyperbole

Remarques VII.2.2

– Si $c = 0$, la conique n'est pas propre, elle contient son centre, l'équation est $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$, qu'on met aisément sous la forme

  – soit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, cas où l'image est un point,

  – soit $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, cas où elle est formée de deux droites sécantes.

– Il faut remarquer qu'une ellipse est compacte alors qu'une hyperbole a des branches infinies. Les asymptotes d'une hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ sont les deux droites sécantes définies par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

(voir l'exercice VII.44... encore une occasion de faire de la publicité pour le paragraphe projectif de ce chapitre !).

– Une ellipse est connexe (par exemple parce qu'image de l'espace connexe $\mathbf{R}$ par l'application continue $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$) mais une hyperbole a deux composantes connexes (pourquoi ?).

Le complémentaire d'un point dans une ellipse est encore connexe (pourquoi ?). On en déduit qu'une ellipse est entièrement contenue dans l'un des demi-plans fermés définis par l'une quelconque de ses tangentes : une tangente rencontre une conique seulement au point de contact comme on l'a vu au § VII.1. Décomposons le plan en réunion disjointe

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{P}_2$$

où $\mathcal{D}$ est la tangente à l'ellipse en un point A et $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ sont les deux demi-plans ouverts qu'elle détermine. Alors, le complémentaire de A dans $\mathcal{C}$ est la réunion disjointe

$$\mathcal{C} - \{A\} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1) \cup (\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2).$$

Comme $\mathcal{C} - \{A\}$ est connexe, il est contenu dans l'un des deux demi-plans ouverts.

Considérons maintenant le cas où la forme quadratique q est dégénérée. Elle est alors de rang 1. Il y a un repère orthonormé dans lequel l'équation de la conique est

$$aY^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma = 0 \text{ avec } a \neq 0.$$

En posant $x = X$, $y = Y + \dfrac{\beta}{2a}$, $c = \gamma - \dfrac{\beta^2}{4a}$ (c'est-à-dire en changeant d'origine), cette équation devient

$$ay^2 + \alpha x + c = 0.$$

Identifions le plan vectoriel E à son dual grâce à la base orthonormée considérée. Alors l'application linéaire $\widetilde{\varphi} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ associée à la forme quadratique $q(x, y) = ay^2$ est

$$\widetilde{\varphi}(x, y) = (0, ay).$$

La forme linéaire $L(x, y) = \alpha x$, quant à elle, est $L = (\alpha, 0) \in \mathbf{R}^2$.

Ainsi L est dans l'image de $\widetilde{\varphi}$ si et seulement si $\alpha = 0$. Dans ce cas ($\alpha = 0$), l'équation est $ay^2 + c = 0$, tous les points de l'axe des x sont des centres de symétrie et la conique est formée de

– deux droites parallèles si $-c/a > 0$,
– d'une droite (dite double) si $c = 0$
– et elle est vide si $-c/a < 0$.

La forme Q s'écrit $ay^2 + cz^2$ et, bien entendu, la conique n'est *pas* propre.

Dans le cas contraire ($\alpha \neq 0$), la conique est propre, elle n'a aucun centre de symétrie et, quitte à changer d'origine, elle a une équation de la forme

$$y^2 = bx \text{ (où l'on peut supposer } b > 0\text{)}.$$

C'est une *parabole* (figure 5).

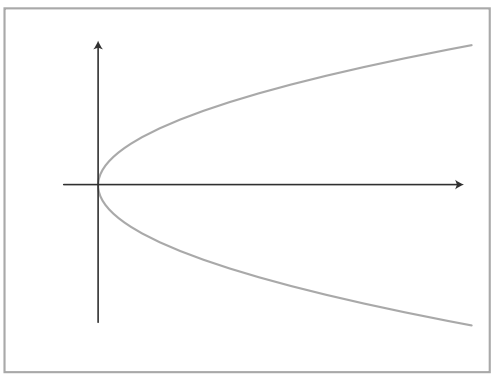


Figure 5. Parabole

Proposition VII.2.3. *Une équation d'une conique propre d'image non vide qui n'a pas de centre de symétrie dans un repère orthonormé est $y^2 = 2px$ pour un nombre réel positif p.* □

Les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y^2 = 2px$$

sont dites *réduites*. Les nombres positifs $2a$, $2b$, p sont respectivement les axes (coniques à centre) et plus précisément le grand et le petit axe (ellipse) et le paramètre (parabole). L'origine du repère dans lequel est écrite l'équation réduite d'une parabole est le *sommet* de cette parabole. Cette terminologie classique n'est pas excellente, les « axes » désignant ici des longueurs plutôt que des axes.

Quand $a = b$, une ellipse est un cercle, une hyperbole est dite *équilatère* (c'est le cas où les asymptotes sont perpendiculaires).

Classification affine

Toute conique propre d'image non vide est dans une et une seule des familles ellipse, hyperbole, parabole, qu'on appelle son *type*. De cette classification euclidienne, déduisons maintenant la classification affine. Le type de la conique suffit

à déterminer sa classe affine. Un corollaire immédiat des propositions VII.2.1 et VII.2.3 est :

Corollaire VII.2.4. *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'image non vide d'un plan affine. Il existe un repère dans lequel une équation de $\mathcal{C}$ a une (et une seule) des formes*

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (ellipse)}, \quad x^2 - y^2 = 1 \text{ (hyperbole) ou } \quad y^2 = x \text{ (parabole)}. \qquad \square$$

Toutes les lectrices ont maintenant compris qu'il s'agit bien d'une classification affine :

Corollaire VII.2.5. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques propres d'images non vides. Pour qu'il existe une transformation affine envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ aient le même type.* $\square$

Remarques VII.2.6

– Le type de la conique décrit son type topologique. En d'autres termes, on peut remplacer « transformation affine » par « homéomorphisme » dans cet énoncé : les ellipses sont les coniques compactes, les paraboles sont les coniques connexes, mais pas compactes, les hyperboles sont les coniques ni connexes ni compactes.

– Comme le montre ce résultat de classification, pour les coniques réelles *propres*, donner l'image est équivalent à donner une équation. On s'autorisera à appeler « ellipse », *etc.* des parties du plan.

– Du point de vue affine, dans un plan euclidien, il n'y a pas de différence entre une ellipse et un cercle. On utilise souvent cette remarque pour démontrer des propriétés des ellipses en se ramenant au cas simple où l'ellipse est un cercle (voir les exercices VII.20 et VII.21 notamment).

Description par foyer et directrice

Dans le plan euclidien, les coniques ont des descriptions strictement métriques.

Proposition VII.2.7. *Pour toute conique propre d'image non vide qui n'est pas un cercle, il existe un point F appelé* foyer*, une droite D ne contenant pas F, appelée* directrice *et un nombre réel positif e appelé* excentricité *tels que la conique soit l'ensemble des points M tels que $FM = ed(M, D)$. Inversement, étant donnés F, D et e, l'ensemble des points M du plan tels que $FM = ed(M, D)$ est une conique propre, une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$.*

Démonstration. Donnons-nous un point F et une droite D ne contenant pas F. Choisissons un repère orthonormé tel que D soit parallèle à l'axe des y et F sur l'axe des x. Le point F a pour coordonnées $(c, 0)$, la droite D a pour équation,

disons $x = h$. Dire que l'on a $FM = ed(M, D)$, c'est dire que les coordonnées (x, y) de M vérifient

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - h)^2,$$

ce qui est bien l'équation d'une conique. On voit que le terme en x^2 va disparaître si $e = 1$. Il faut donc considérer ce cas à part.

– Si $e = 1$, on choisit l'origine O pour avoir $h = -c$, on obtient $y^2 = 4cx$, la conique est une parabole de paramètre $2\,|c|$ et de sommet O.

– Si $e \neq 1$, on arrive de même à $h = c/e^2$, ce qui met notre équation sous la forme

$$\frac{x^2}{(c^2/e^2)} + \frac{y^2}{((1 - e^2)c^2/e^2)} = 1.$$

On a une ellipse si $e < 1$, une hyperbole si $e > 1$.

Ceci montre que F, D et e déterminent bien une conique propre. Inversement, il est facile de mettre une équation réduite de conique (qui n'est pas un cercle) sous une des formes obtenues ci-dessus, ce qui permet de déterminer F, D et e vérifiant la propriété souhaitée. □

Remarquons encore que le foyer F est sur un axe de symétrie de la conique, qu'on appelle donc l'*axe focal*, et que la directrice D est perpendiculaire à cet axe.

Remarque VII.2.8. Par symétrie, les coniques propres à centre qui ne sont pas des cercles ont deux foyers (situés sur le grand axe dans le cas d'une ellipse) et deux directrices parallèles.

Propriétés bifocales des coniques à centre

On peut aussi décrire les ellipses et hyperboles rien qu'à l'aide des deux foyers. Remarquons d'abord qu'une ellipse est contenue dans la bande définie par ses deux directrices alors qu'une hyperbole est à l'extérieur de cette bande : le calcul précédent montre que le foyer et le centre de symétrie sont du même côté de la directrice dans le cas de l'ellipse et de part et d'autre dans le cas de l'hyperbole.

Proposition VII.2.9. *Une ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$ pour un certain réel positif a tel que $2a > FF'$.*

Une hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ pour un certain réel positif a tel que $2a < FF'$.

Démonstration. Je traite le cas des ellipses et laisse celui des hyperboles aux lecteurs. Si $\mathcal{C}$ est une ellipse de foyers F et F' et si D et D' sont les deux directrices

correspondantes, on a

$$MF + MF' = e(d(M, D) + d(M, D')) = ed(D, D')$$

puisque l'ellipse est entièrement située entre les deux directrices. On pose

$$a = \frac{ed(D, D')}{2}.$$

On a montré jusqu'ici que $\mathcal{C}$ est contenue dans l'ensemble

$$\mathcal{C}' = \{M \mid MF + MF' = 2a\}$$

avec $2a > FF'$. Considérons donc l'ensemble $\mathcal{C}'$ et montrons que c'est bien l'ellipse $\mathcal{C}$. Il suffit pour cela de montrer que $\mathcal{C}'$ est une conique. Choisissons un repère d'origine le milieu de FF' et d'axe des x la droite FF' de sorte que les points F et F' ont pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ (avec $c > 0$). On peut écrire

$$MF^2 + MF'^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) \text{ et } MF'^2 - MF^2 = 4cx.$$

Si le point M est tel que $MF + MF' = 2a > 0$, on en déduit qu'il vérifie l'égalité $MF' - MF = 2cx/a$. On peut résoudre en $MF = a - cx/a$ et $MF' = a + cx/a$, on a donc

$$\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 + \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2),$$

équation qui s'écrit aussi

$$(a^2 - c^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) + y^2 = 0.$$

C'est bien l'équation d'une conique (et, forcément, d'une ellipse, à cause de l'inégalité $a > c$). □

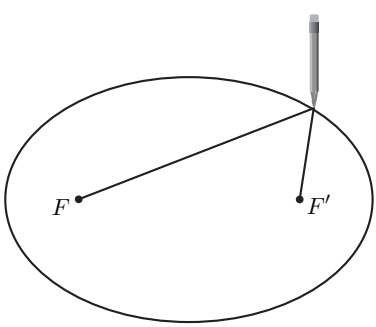


Figure 6

Cette définition de l'ellipse donne un moyen de la dessiner avec un crayon et une ficelle dont les extrémités sont fixées aux deux foyers (figure 6). C'est effectivement ainsi que l'on dessine des parterres de fleurs elliptiques, c'est pourquoi cette méthode s'appelle « construction du jardinier ».

Bissectrices et tangentes

Si F est un foyer de $\mathcal{C}$ et si M et N sont deux points de $\mathcal{C}$, les bissectrices de l'angle (FM, FN) s'obtiennent très simplement, comme l'exprime la proposition suivante (voir la figure 7).

Proposition VII.2.10. *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre non vide de foyer F et de directrice D. Soient M et N deux points de $\mathcal{C}$. On suppose que la droite MN rencontre D en P. Alors la droite PF est une bissectrice de l'angle de droites (FM, FN).*

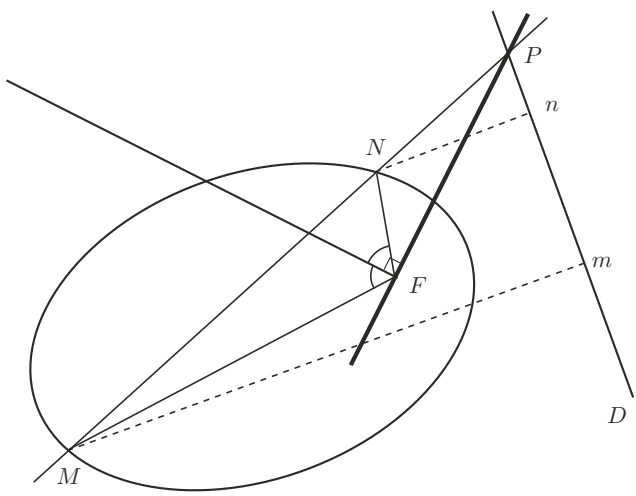


Figure 7

Démonstration. Appelons m et n les projections orthogonales de M et N sur D. Les droites Mm et Nn sont parallèles et le théorème de Thalès nous donne

$$\frac{PM}{PN} = \frac{Mm}{Nn},$$

mais, par définition de foyer et directrice,

$$\frac{Mm}{Nn} = \frac{MF}{NF},$$

de sorte que

$$\frac{PM}{PN} = \frac{FM}{FN}.$$

On en déduit que PF est une des bissectrices de l'angle (FM, FN)[6]. □

Remarque VII.2.11. Si MN est parallèle à D, on peut remplacer la droite PF par la parallèle à D passant par F. Le résultat reste vrai (par un argument de symétrie).

Si on fait tendre N vers M, la sécante MN tend vers la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Si celle-ci rencontre D en un point P, la droite PF est bissectrice de l'angle de droite (FM, FM), c'est-à-dire est orthogonale à FM. C'est ce qu'affirme la proposition suivante.

Proposition VII.2.12. *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre qui n'est pas un cercle, soit F un foyer de $\mathcal{C}$ et soit D la directrice correspondante. Si M est un point de $\mathcal{C}$, soit P le point d'intersection de la perpendiculaire à MF en F et de la droite D. Alors la droite PM est tangente à $\mathcal{C}$ en M.* □

Pour celles de nos lectrices qui n'apprécient pas les passages à la limite à leur juste valeur, indiquons les grandes lignes d'une autre démonstration[7].

Une autre démonstration de la proposition VII.2.12. La droite PM rencontre déjà $\mathcal{C}$ en M. Pour montrer qu'elle est tangente à $\mathcal{C}$, vérifions qu'elle ne contient aucun autre point de $\mathcal{C}$. Soit donc N un point de PM autre que M. Appelons m et n les projetés orthogonaux de M et N sur D, N' le projeté orthogonal de N sur PF. Si e est l'excentricité de $\mathcal{C}$, on a

$$e = \frac{MF}{Mm} = \frac{NN'}{Nn} \text{ en vertu du théorème de Thalès}$$

et $NN' < NF$ (figure 8). On en déduit l'inégalité

$$\frac{NF}{Nn} > e$$

et donc que N n'est pas sur $\mathcal{C}$.

Il reste à vérifier que cet unique point M n'est pas un point d'intersection simple de la droite PM et de $\mathcal{C}$.

---

[6] Voir au besoin les exercices III.23 ou VI.36.

[7] Cet argument m'a été indiqué par Daniel Perrin. Voir aussi **[16]** pour un argument plus géométrique.

– Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une ellipse, de telles sécantes n'existent pas, donc la démonstration est complète.

– Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une parabole, ces sécantes sont les parallèles à l'axe, c'est-à-dire les perpendiculaires à D. Or, si PM est orthogonale à D, le triangle PMF est rectangle en F *et* isocèle de sommet M (puisque $MF = MP$), ce qui est impossible.

– Le cas où $\mathcal{C}$ est une hyperbole est plus pénible et je le laisse aux lecteurs (exercice VII.36). □

Remarque VII.2.13. Ici encore, la droite MF peut être orthogonale à D (le point P peut être à l'infini). On remplace alors la droite PM par la parallèle à D passant par M.

Corollaire VII.2.14. *Si P est un point de la directrice D, les points de contact avec $\mathcal{C}$ des tangentes issues de P sont alignés avec F.* □

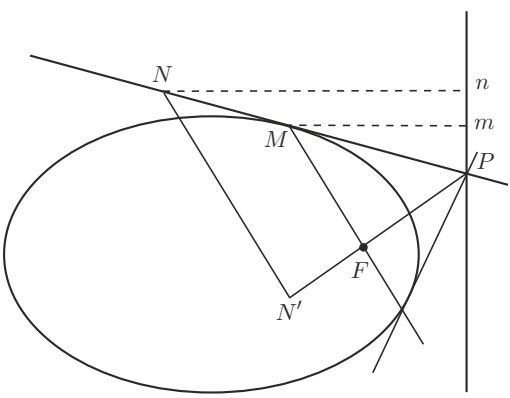


Figure 8

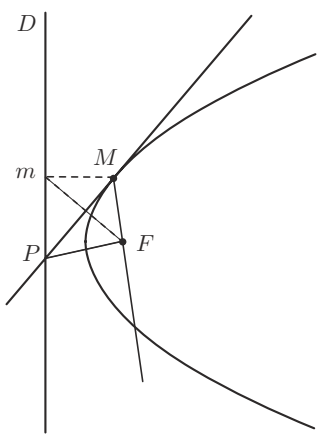


Figure 9

On en déduit une propriété utile de la parabole et de ses tangentes. Elle donne une méthode de construction de la tangente en un point (figure 9).

Corollaire VII.2.15. *Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D. La tangente à $\mathcal{P}$ en un de ses points M est la médiatrice du segment Fm joignant F à la projection m de M sur D.*

Démonstration. La tangente à $\mathcal{P}$ en M coupe D en P, on a $PF \perp FM$ d'après ce qui précède. Donc F est le symétrique de m par rapport à MP, qui est bien la médiatrice de Fm. □

Corollaire VII.2.16. *Le projeté orthogonal du foyer d'une parabole sur une tangente à cette parabole est aussi sur la tangente au sommet.*

Démonstration. Avec les mêmes notations que ci-dessus, le projeté de F sur la tangente en M est l'image de m par l'homothétie de centre F et de rapport $1/2$. Or l'image de la directrice par cette homothétie est la tangente au sommet. □

Voici maintenant une application aux coniques à centre : la tangente en M est une bissectrice de l'angle (MF, MF') (figure 10).

Corollaire VII.2.17. *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre à centre de foyers F et F'. La tangente à $\mathcal{C}$ en M est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle en M du triangle MFF' si $\mathcal{C}$ est une hyperbole (resp. une ellipse).*

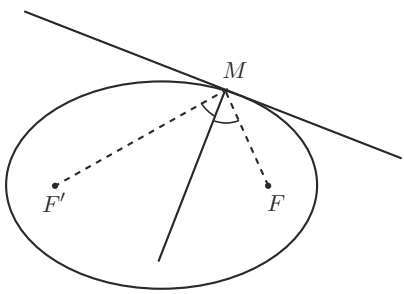


Figure 10

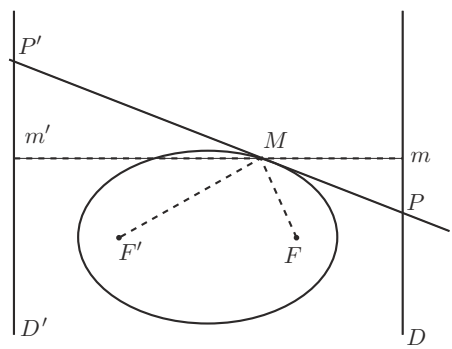


Figure 11

Démonstration. Soient D et D' les directrices associées aux foyers F et F' et soient P et P' les points d'intersection de la tangente en M avec D et D', m et m' les projections de M sur D et D' (figure 11).

On sait que $PF \perp MF$ et de même que $P'F' \perp MF'$. De plus,

$$\frac{MF'}{MF} = \frac{Mm'}{Mm} = \frac{MP'}{MP}$$

de sorte que les triangles rectangles MFP et $MF'P'$ sont semblables[8], d'où l'égalité des angles.

Comme on l'a dit plus haut, l'ellipse est contenue dans un des demi-plans fermés définis par la tangente. Le segment FF' est contenu dans l'intérieur de l'ellipse et la tangente ne peut le rencontrer. C'est donc la bissectrice extérieure, en vertu

[8] Voir les cas de similitude des triangles dans l'exercice III.41.

de la proposition III.1.14. Les lectrices sont invitées à vérifier, de façon analogue, que c'est la bissectrice intérieure dans le cas d'une hyperbole. □

Remarque VII.2.18. Ces propriétés tangentielles sont à la source de nombreux problèmes d'enveloppes (voir le chapitre VIII et notamment ses exercices).

VII.3. Quadriques et coniques projectives

Plaçons-nous maintenant dans un espace projectif réel ou complexe $P(E)$ de dimension n. Comme pour le chapitre VI, on pourra consulter [**46, 5, 49**].

Définition des quadriques projectives

On appelle *quadrique* de $P(E)$ la donnée d'une forme quadratique non nulle sur E, modulo multiplication par un scalaire non nul, autrement dit, un élément de l'espace projectif associé à l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

Si Q est une forme quadratique et $Q^{-1}(0) \subset E$ son cône isotrope, l'*image* de la quadrique est $p(Q^{-1}(0) - \{0\})$. Elle ne change pas si on remplace Q par λQ ($\lambda \neq 0$), autrement dit, elle ne dépend que de la quadrique définie par Q.

Si une des formes quadratiques Q définissant une quadrique est une forme non dégénérée, elles le sont toutes. On dit alors que la quadrique est *propre*.

Comme dans le cas affine, une conique est une quadrique d'un plan.

Remarque VII.3.1. Si E est un espace vectoriel réel et si Q est définie positive, alors l'image de la quadrique est vide. Sur $\mathbf{C}$, l'image d'une quadrique n'est jamais vide.

Exemple VII.3.2. En dimension 1, on considère une forme quadratique non nulle sur un espace vectoriel de dimension 2. Son rang est 1 ou 2. Elle est équivalente à x^2, ou à $x^2 \pm y^2$. L'image de la quadrique est un point en rang 1, vide (dans le cas réel seulement) ou deux points en rang 2.

Liaison affine/projectif

Si $P(E)$ est le complété projectif d'un espace affine $\mathcal{F}$ et si $\mathcal{F}$ est décrit par l'équation $z = 1$ dans $P(E)$ ($E = F \times \mathbf{K}$, comme au § VI.3), toute quadrique affine d'équation

$$q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + C = 0$$

définit une quadrique projective, d'équation

$$Q(u, z) = q(u) + L(u)z + Cz^2 = 0$$

(avec les notations du § VII.1) : on a simplement *homogénéisé* l'équation de la quadrique affine. La quadrique affine est propre si et seulement si la quadrique projective l'est. Les points (u, z) de la quadrique projective sont les points $(u, 1)$ tels que u soit un point de la quadrique affine et les points (à l'infini) $(u, 0)$ tels que u soit un vecteur isotrope de q.

Inversement, si la forme quadratique Q est l'équation d'une quadrique projective dans le complété projectif d'un espace affine $\mathcal{F}$ et si elle n'est pas produit de z par une forme linéaire[9], elle définit une quadrique affine dans $\mathcal{F}$ par l'opération inverse : on *déshomogénéise* la forme Q en y « faisant $z = 1$ ».

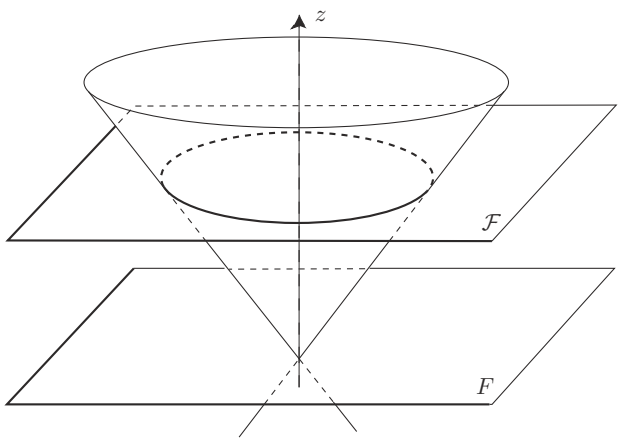


Figure 12

On reviendra sur ces opérations pour déduire les propriétés des coniques affines (et même affines euclidiennes) de celles des coniques projectives au § VII.5.

Intersection d'une droite et d'une quadrique

Comme une droite affine (voir le § VII.1) et pour la même raison, une droite projective rencontre une quadrique projective en zéro, un ou deux points ou elle est contenue dans cette quadrique.

Démonstration. Soient x et y deux vecteurs engendrant un plan vectoriel de E. On trouve l'intersection de la droite projective qu'ils déterminent avec la quadrique en résolvant l'équation

$$Q(x + ty) = Q(x) + 2t\Phi(x, y) + t^2 Q(y) = 0$$

[9] Si Q est produit de z par une forme linéaire, la quadrique projective est dégénérée (voir l'exercice VII.3) et contient l'hyperplan à l'infini.

(où Φ désigne, bien sûr, la forme polaire de Q), qui est une équation du second degré en t. $\square$

Quand cette équation est vérifiée pour tout t, le plan vectoriel engendré par x et y est isotrope pour Q et la droite projective est contenue dans la quadrique. Sur $\mathbf{C}$, toutes les quadriques de dimension ≥ 2 contiennent des droites (voir l'exercice VII.47).

Espaces tangents

Si $\mathcal{C}$ est une quadrique propre définie par une forme quadratique Q, pour tout x de E, le sous-espace orthogonal $x^{\perp_Q}$ est un hyperplan. L'hyperplan projectif $P(x^{\perp_Q})$ est appelé *hyperplan tangent* à $\mathcal{C}$ en $m = p(x)$.

On dit qu'un sous-espace projectif est tangent à $\mathcal{C}$ en m s'il est contenu dans l'hyperplan tangent.

Une droite contenue dans une quadrique est, en particulier, tangente à cette quadrique.

Démonstration. Si le plan vectoriel engendré par x et y est isotrope pour Q, alors il est contenu dans l'orthogonal de x : l'égalité $Q(x + ty) = 0$ vérifiée pour tout t implique l'égalité $\Phi(x, y) = 0$. L'hyperplan $P(x^{\perp_Q})$ contient alors toute la droite définie par x et y qui est donc bien tangente à $\mathcal{C}$ en $m = p(x)$. $\square$

Remarquons aussi que cette notion d'espace tangent est cohérente avec la notion affine. Si $\mathcal{C}$ est la complétée projective d'une quadrique affine, l'hyperplan tangent en un point A de sa partie affine est le complété projectif de l'hyperplan affine tangent en A.

Démonstration. La quadrique affine a une équation $f(M) = 0$, on choisit l'origine du plan affine au point A de la quadrique pour écrire

$$f(M) = q(\overrightarrow{AM}) + L(\overrightarrow{AM}).$$

La complétée projective est définie par la forme quadratique

$$Q(u, z) = q(u) + zL(u).$$

La forme polaire de Q est Φ, définie par

$$\Phi((u, z), (u', z')) = \varphi(u, u') + \frac{1}{2}(zL(u') + z'L(u)).$$

L'orthogonal pour Q du vecteur $(0, 1)$ correspondant à A est donc

$$H = \left\{ (v, z) \mid \frac{1}{2}L(v) = 0 \right\}$$

qui est l'hyperplan projectif complété de l'hyperplan affine tangent à la quadrique affine en A (le noyau de L, voir la démonstration de la proposition VII.1.7) comme on voulait le démontrer. □

Remarque VII.3.3. Si on revient à l'intersection d'une droite et d'une quadrique considérée ci-dessus, on remarque qu'une droite est tangente à une quadrique si et seulement si son intersection avec cette quadrique est composée d'un ou de plus de trois points.

Dualité et polarité

Il s'agit ici de tirer un parti géométrique de l'orthogonalité par rapport à une forme quadratique. Dans cette partie, on ne considérera que des formes quadratiques non dégénérées (alias des quadriques propres).

Une forme quadratique non dégénérée Q définit un isomorphisme

$$\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow E^\star$$

et donc aussi une homographie

$$\psi : P(E) \longrightarrow P(E^\star)$$

qui ne dépend que de la classe de Q dans $PQ(E)$, c'est-à-dire de la quadrique définie par Q.

On appelle ψ la *polarité* par rapport à la quadrique définie par Q. Par exemple, si m est un point de $P(E)$, $\psi(m)$ est un point de $P(E^\star)$, c'est-à-dire un hyperplan de E, on l'appelle l'hyperplan polaire de m (la polaire, dans le cas des coniques) et on le note $m^\perp$.

Il s'agit bien d'orthogonalité, par rapport à Q (qu'il n'est pas utile de faire intervenir dans la notation tant qu'il n'y a qu'une quadrique en jeu) : si m et n sont des points de $P(E)$ avec $m = p(x)$, $n = p(y)$, l'équation $\varphi(x, y) = 0$ décrit l'orthogonalité de x et y par rapport à Q. On dit que m est orthogonal à n (notation $m \perp n$) si $\varphi(x, y) = 0$. L'hyperplan $m^\perp$ est constitué des droites vectorielles orthogonales à m.

De même, si H est un hyperplan, $H^\perp$ est un point, le *pôle* de H par rapport à la quadrique. Les lecteurs ont déjà compris que le pôle de l'hyperplan polaire de m est m, *etc.*

Exemple VII.3.4. On suppose que E est un espace vectoriel euclidien, ou, si l'on préfère, que Q est une forme quadratique (réelle) définie positive. L'image de la quadrique définie par Q est l'ensemble des vecteurs x non nuls vérifiant l'équation

$$Q(x) = 0.$$

Cette image est vide. Mais cette quadrique est certainement intéressante quand même, puisque la polarité par rapport à elle est l'orthogonalité de tout le monde... Cet exemple est assez important pour contenir en germe toutes les propriétés métriques des coniques euclidiennes comme on le verra plus bas.

Remarques VII.3.5

(1) Si m est un point de la quadrique $\mathcal{C}$, on a dit que $m^\perp$ est l'hyperplan tangent à $\mathcal{C}$ en m.

(2) En dimension 1. Si D est une droite projective et $\mathcal{C}$ une quadrique propre d'image non vide de D, elle est formée de deux points a et b. Alors m est orthogonal à n si et seulement si le birapport $[a, b, m, n]$ vaut -1.

Démonstration. C'est un calcul dans le plan vectoriel dont la droite projective D est l'image. On en choisit une base de façon que les points a et b soient les images des vecteurs de base. La quadrique est définie par une forme quadratique non dégénérée en deux variables x et y pour laquelle les deux vecteurs de base $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont isotropes. C'est donc un multiple non nul de la forme $Q(x, y) = xy$.

Les points m et n sont les images des vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y') et le birapport vaut

$$[a, b, m, n] = \frac{y}{x} \Big/ \frac{y'}{x'}.$$

Il vaut -1 si et seulement si les vecteurs (x, y) et (x', y') vérifient l'égalité

$$xy' + yx' = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si ils sont orthogonaux pour Q. □

(3) On peut appliquer les remarques qui précèdent pour construire l'hyperplan polaire du point m. Concentrons-nous sur le cas des coniques. Supposons que, du point m, on puisse mener deux tangentes à la conique $\mathcal{C}$. Appelons p_1 et p_2 les deux points de contact. Le point m est sur les tangentes en p_1 et p_2 : $m \in p_1^\perp \cap p_2^\perp$, donc p_1 est sur $m^\perp$, on a de même $p_2 \in m^\perp$. La droite p_1p_2 est donc la polaire de m par rapport à $\mathcal{C}$ (figure 13).

(4) Plus généralement (parce que, dans le cas réel, les tangentes issues de m pourraient n'être pas réelles), traçons une droite passant par m et coupant la conique en deux points a et b. Les tangentes en a et b se coupent en un point n. D'après ce qu'on vient de voir, la droite ab est la polaire du point n. Donc n est le pôle de la droite ab et la polaire de m passe par n.

(5) On peut aussi utiliser des sécantes à la place des tangentes pour construire la polaire du point m, comme indiqué sur la figure 15. On a $[m, z, a, c] = -1$ (pour ça, on peut oublier la conique — figure de droite — et envoyer la droite mn à

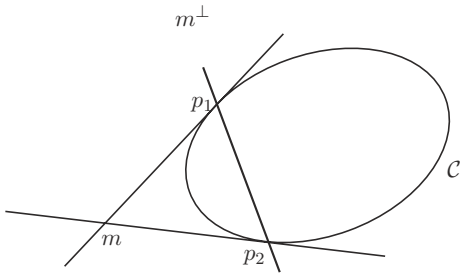


Figure 13

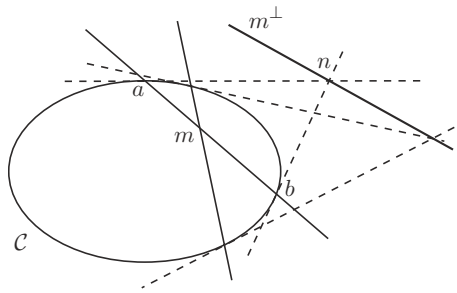


Figure 14

l'infini), donc z est sur la polaire de m, et t aussi pour la même raison, donc la polaire de m est zt, et de même celle de n est xy.

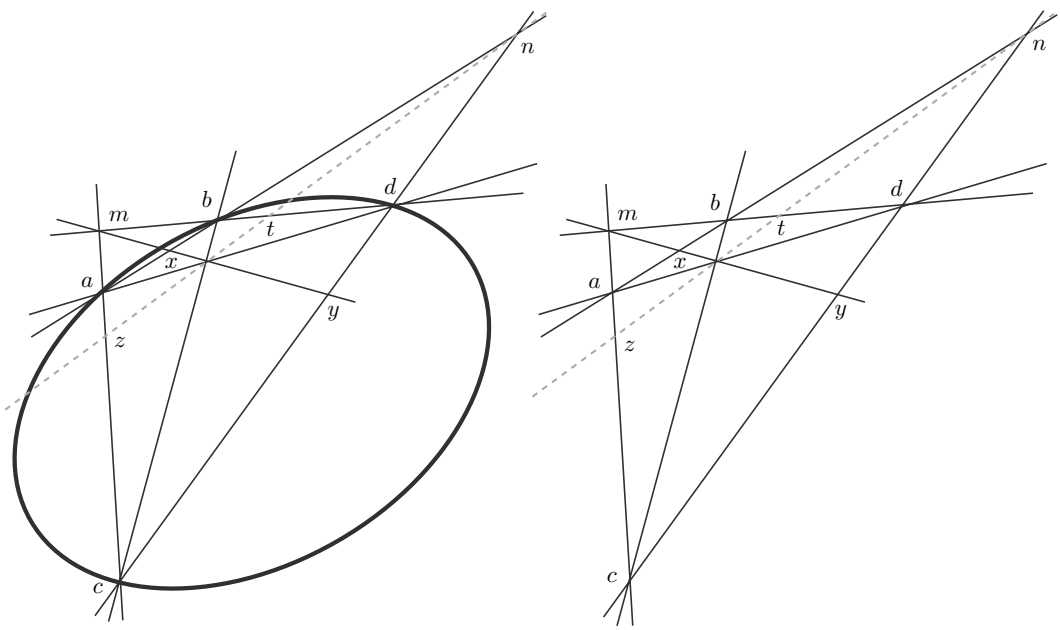


Figure 15

Classification projective

Le groupe projectif opère sur l'ensemble des quadriques. Soient $f : P(E) \to P(E)$ une homographie, provenant d'un isomorphisme $g : E \to E$ et $\mathcal{C}$ une quadrique de $P(E)$ d'équation Q. Alors $Q \circ g^{-1}$ est aussi une forme quadratique non nulle. On note $f(\mathcal{C})$ sa classe dans l'espace des quadriques (il est clair qu'elle ne

dépend que de $\mathcal{C}$ et pas du choix de la forme quadratique Q et de même qu'elle ne dépend que de l'homographie f et pas du choix de l'application linéaire g). Remarquons que « l'image de $f(\mathcal{C})$ est l'image par f de l'image de $\mathcal{C}$ ».

Démonstration. Le point n est dans l'image de $f(\mathcal{C})$ si et seulement s'il provient d'un vecteur (non nul) v tel que $Q \circ g^{-1}(v) = 0$. Appelons m l'image dans $P(E)$ de l'unique vecteur (non nul) u de E tel que $g(u) = v$. Ainsi $n = f(m)$. L'égalité $Q \circ g^{-1}(v) = 0$ est équivalente à $Q(u) = 0$, c'est-à-dire au fait que m est dans l'image de $\mathcal{C}$. On a donc bien montré que n est dans l'image de $f(\mathcal{C})$ si et seulement s'il s'écrit $f(m)$ pour un point m de l'image de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'égalité

$$\mathrm{Im}(f(\mathcal{C})) = f(\mathrm{Im}(\mathcal{C})). \qquad \square$$

Proposition VII.3.6. *Sous l'action de* $\mathrm{PGL}(E)$*, les orbites des quadriques de l'espace projectif* $P(E)$ *de dimension* n *sont caractérisées par*

- *le rang d'une équation si* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$*,*
- *les couples* (s, r) *avec* $0 \leq r \leq s \leq n+1$ *et* $1 \leq r + s \leq n+1$ *si* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$*.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la classification des formes quadratiques (voir au besoin le corollaire VII.7.2) ainsi que du fait que, sur $\mathbf{R}$ et pour $\lambda < 0$, la signature de λQ est (r, s) si celle de Q était (s, r). $\square$

Considérons par exemple le cas des quadriques projectives réelles et *propres*. Le rang de la forme quadratique est $n+1$ donc $s+r = n+1$. On trouve $\left[\dfrac{n+1}{2}\right] + 1$ types de quadriques. Par exemple :

– pour $n = 2$, les couples (s, r) à considérer sont $(0, 3)$ (l'image de la quadrique est vide) et $(1, 2)$, où une équation peut être choisie de la forme $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (conique propre). On remarquera la simplicité de cette classification, comparée à la classification affine (ellipses, paraboles, hyperboles) ;

– pour $n = 3$, on trouve de même $(0, 4)$ (image vide), $(1, 3)$ (équation $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$) et $(2, 2)$ (équation $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$).

Remarque VII.3.7. Le nombre total d'orbites est $n + 1$ dans le cas complexe et, dans le cas réel, $(n^2 + 6n + 4)/4$ si n est pair et $(n^2 + 6n + 5)/4$ si n est impair.

Faisceaux de quadriques

On considère maintenant certains sous-espaces projectifs de l'espace $PQ(E)$ des quadriques.

Proposition VII.3.8. *Soit* m *un point de* $P(E)$*. L'ensemble de toutes les quadriques dont les images contiennent* m *est un hyperplan de* $PQ(E)$*.*

Démonstration. Notons $H(m) = \{\mathcal{C} \in PQ(E) \mid m \in \mathrm{Im}(\mathcal{C})\}$. Si $m = p(x)$ et $\mathcal{C} = p(Q)$, dire que $m \in \mathrm{Im}(\mathcal{C})$ c'est dire que $Q(x) = 0$. Le vecteur x étant fixé, ceci est bien une équation linéaire en Q (non nulle car $x \neq 0$). □

Corollaire VII.3.9. *Soient $m_1, \ldots, m_k$ des points de $P(E)$. L'ensemble des quadriques passant par les points $m_1, \ldots, m_k$ est un sous-espace projectif de dimension au moins égale à $\dfrac{n(n+3)}{2} - k$. En particulier, par $\dfrac{n(n+3)}{2}$ points, il passe toujours au moins une quadrique.* □

Par exemple, par cinq points du plan, il passe toujours une conique, par neuf points de l'espace de dimension 3, il passe toujours une quadrique.

On appelle *faisceau* de quadriques une droite de l'espace $PQ(E)$. On peut définir un faisceau par deux de ses points : on donne deux quadriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ distinctes d'équations Q et Q' (non proportionnelles, donc) et on considère les quadriques d'équations $\lambda Q + \lambda' Q'$. Les *points bases* d'un faisceau sont les points communs à toutes les quadriques de ce faisceau.

Remarque VII.3.10. Étant donnés un faisceau de quadriques $\mathcal{F}$ et un point m, il passe toujours une quadrique de $\mathcal{F}$ par m : il s'agit en effet de considérer l'intersection dans l'espace $PQ(E)$ de la droite $\mathcal{F}$ et de l'hyperplan $H(m)$... toujours non vide.

Proposition VII.3.11. *Ou bien toutes les quadriques du faisceau $\mathcal{F}$ sont dégénérées, ou bien il y a au plus $n+1$ quadriques dégénérées dans $\mathcal{F}$. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il y a toujours une quadrique dégénérée dans $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Soient Q et Q' des équations de deux quadriques déterminant le faisceau $\mathcal{F}$, A et A' les matrices de ces formes quadratiques dans une base de E. La quadrique d'équation $\lambda Q + \lambda' Q'$ est dégénérée si et seulement si

$$\text{dét}(\lambda A + \lambda' A') = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un polynôme homogène de degré $n+1$ en λ et λ'. Si ce polynôme est identiquement nul, toutes les quadriques de $\mathcal{F}$ sont dégénérées. Sinon, on met en facteur la plus grande puissance possible de λ' pour le mettre sous la forme $\text{dét}(\lambda A + \lambda' A') = (\lambda')^k P(\lambda, \lambda')$, où P est un polynôme homogène de degré $n+1-k$ et $P(\lambda, 0)$ n'est pas identiquement nul. Alors les couples (λ, λ') solutions sont

- les $(\lambda, 0)$ si $k \geq 1$,
- les $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda'}, 1\right)$ tels que $P\left(\dfrac{\lambda}{\lambda'}, 1\right) = 0$ qui sont, au plus, au nombre de $n+1-k$.

On en déduit le résultat. □

Par exemple, on peut étudier et classifier les faisceaux de coniques selon le nombre et la nature des coniques dégénérées qu'ils contiennent. Il y a au plus trois coniques dégénérées et dans le cas complexe, les coniques dégénérées sont des droites doubles ou des paires de droites. Voir l'exercice VII.49 ou [**5**].

Intersection de deux coniques

Deux coniques projectives complexes se coupent en quatre points. Ici $4 = 2 \times 2$ est le produit des degrés des deux courbes et cette propriété est un cas particulier du théorème de Bézout (voir par exemple [**38**]) : deux courbes projectives complexes de degrés m et n se coupent en mn points. Il faut bien sûr tenir compte des multiplicités : un point où les deux courbes sont tangentes « compte plus ».

Étudions le cas des coniques. Supposons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient deux coniques projectives complexes, définies par les formes quadratiques Q et Q'. On suppose que $\mathcal{C}$ est propre. Il est bien clair que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est aussi l'intersection de $\mathcal{C}$ avec n'importe quelle conique (autre que $\mathcal{C}$) du faisceau engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. En effet, on a $Q(x, y, z) = Q'(x, y, z) = 0$ si et seulement si

$$Q(x, y, z) = \lambda Q(x, y, z) + \lambda' Q'(x, y, z) = 0$$

pour un $\lambda' \neq 0$. Donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec une conique dégénérée $\mathcal{C}''$ du faisceau. Mais $\mathcal{C}''$ est formée de deux droites sécantes ou d'une droite double. La figure 16, sur laquelle les droites doubles ont été dessinées « épaisses », montre les « quatre » points d'intersection annoncés (attention, toutes les paires de coniques représentées sur cette figure ne définissent pas des faisceaux distincts, voir l'exercice VII.49).

VII.4. Birapport sur une conique et théorème de Pascal

On se donne une conique $\mathcal{C}$ et un point m du plan. À m, on associe le faisceau des droites passant par m, c'est-à-dire la droite $m^\star$ de $P^\star$.

Tout point m de $\mathcal{C}$ définit une application

$$\pi_m : \mathcal{C} \longrightarrow m^\star$$

qui, au point n de $\mathcal{C}$, associe la droite mn, avec la convention que $\pi_m(m)$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en m. On va montrer que π_m, ou plus exactement π_m^{-1} est un *paramétrage* de la conique $\mathcal{C}$ par la droite projective $m^\star$ (c'est-à-dire la première assertion de la proposition suivante).

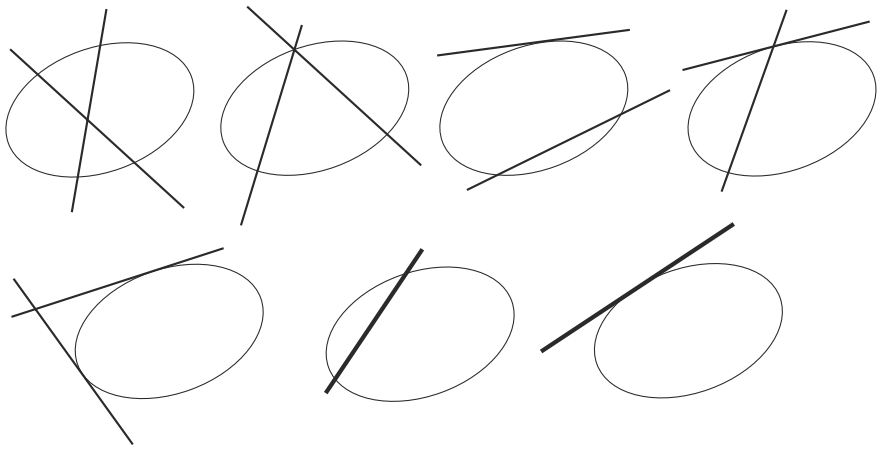


Figure 16

Proposition VII.4.1. *Pour tout point m de $\mathcal{C}$, l'application π_m est une bijection. De plus, si m et n sont deux points de $\mathcal{C}$, la composée*

$$\pi_n \circ \pi_m^{-1} : m^\star \longrightarrow n^\star$$

est une homographie.

Remarque VII.4.2. Cette proposition admet une réciproque : si m et n sont deux points du plan et si $f : m^\star \to n^\star$ est une homographie, il existe une conique $\mathcal{C}$ qui passe par m et n et telle que

$$\mathrm{Im}(\mathcal{C}) = \{D \cap f(D) \mid D \in m^\star\}$$

(voir [**5**] ou [**49**]). L'ensemble formé de la proposition et de sa réciproque s'appelle souvent le théorème de Chasles-Steiner. La transformation $m^\star \to n^\star$ est indiquée sur la figure 17.

Corollaire VII.4.3. *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'image non vide et soient $m_1, \ldots, m_4$ quatre points de $\mathcal{C}$. Alors le birapport $[mm_1, mm_2, mm_3, mm_4]$ ne dépend pas du choix du point m choisi sur $\mathcal{C}$.*

On appelle donc ce birapport le *birapport* des quatre points $m_1, \ldots, m_4$ sur la conique $\mathcal{C}$.

Démonstration de la proposition. Pour ne pas utiliser de résultat trop technique sur les homographies, je donne une démonstration « en coordonnées ». Tout est dans le choix de ces coordonnées : on choisit la droite mn comme droite à l'infini,

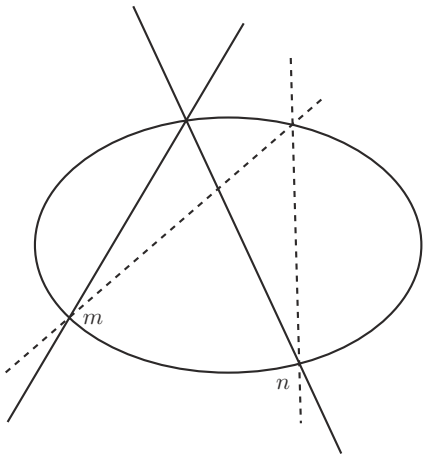


Figure 17

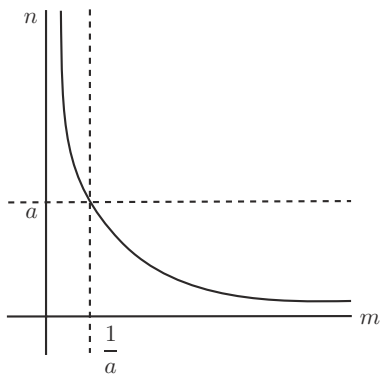


Figure 18

de sorte que, dans le plan affine complémentaire, la conique est une hyperbole. On choisit ensuite un repère affine d'origine le centre et d'axes les asymptotes dans lequel l'équation de la conique est $xy = 1$. Les points m et n sont les points à l'infini de l'axe des x et de celui des y (respectivement), de sorte que le faisceau $m^\star$ est celui des droites parallèles à l'axe des x, d'équations $y = a$, alors que $n^\star$ est celui des $x = b$, parallèles à l'axe des y (voir la figure 18).

L'application $\pi_n \circ \pi_m^{-1}$ est donc

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cup \{\infty\} = m^\star &\longrightarrow n^\star = \mathbf{K} \cup \{\infty\} \\ a &\longmapsto 1/a \end{aligned}$$

homographie s'il en fut. □

On va maintenant démontrer le théorème de Pascal, dont on a déjà rencontré des cas particuliers (voir l'exercice III.48). Pascal démontrait son théorème dans un cercle (le cas général des coniques s'en déduit) sans doute en utilisant le théorème de Menelaüs (exercice I.56).

***Théorème VII.4.4* (Théorème de Pascal).** *Soit $\mathcal{C}$ une (image de) conique propre et soient a, b, c, d, e et f six points de $\mathcal{C}$. Alors les points d'intersection de ab et de, bc et ef, cd et fa sont alignés.*

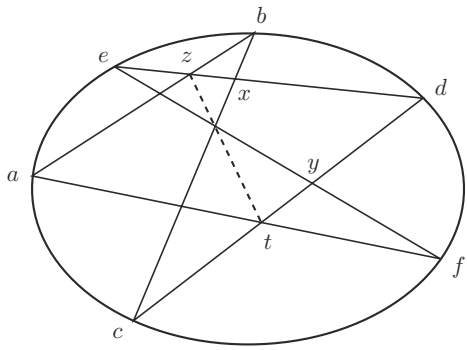


Figure 19. L'« hexagramme mystique » de Pascal

Démonstration. Donnons des noms à quelques-uns des points d'intersection (voir la figure 19) :

$$\begin{cases} x = bc \cap ed \\ y = cd \cap ef \\ z = ab \cap de \\ t = af \cap cd. \end{cases}$$

Nous voulons montrer que le point d'intersection des droites bc et ef se trouve sur la droite zt. Pour ce faire, calculons le birapport $[z, x, d, e]$ (ces quatre points sont alignés sur la droite ed) :

$$\begin{aligned} [z, x, d, e] &= [bz, bx, bd, be] \\ &= [ba, bc, bd, be] && \text{(ce sont d'autres noms des mêmes droites)} \\ &= [fa, fc, fd, fe] && \text{(car } f \text{ est un autre point de } \mathcal{C}, \\ & && \text{on applique le corollaire)} \\ &= [t, c, d, y] && \text{(on utilise la sécante } cd\text{).} \end{aligned}$$

On a donc l'égalité $[z, x, d, e] = [t, c, d, y]$. Soit m le point d'intersection de zt et bc. La perspective de centre m (envoyant la droite ed sur la droite cd) applique z sur t, x sur c, d sur lui-même. Conservant le birapport, elle doit donc appliquer e sur y. Ainsi, e, m et y sont alignés et m, qui était déjà sur bc et sur zt, est aussi sur ef... ce que nous voulions démontrer. □

VII.5. Quadriques affines et géométrie projective

On considère maintenant le plan projectif réel comme complétion d'un plan affine. On a dit que toute conique projective définissait une conique affine. On

a vu aussi qu'il y a un seul type de conique projective propre (non vide) sur $\mathbf{R}$ comme sur $\mathbf{C}$. La question de la classification affine se réduit donc à la question de la position de la conique par rapport à la droite à l'infini. En termes de la forme quadratique (déshomogénéisée) q, on a dit qu'il s'agissait simplement de ses vecteurs isotropes.

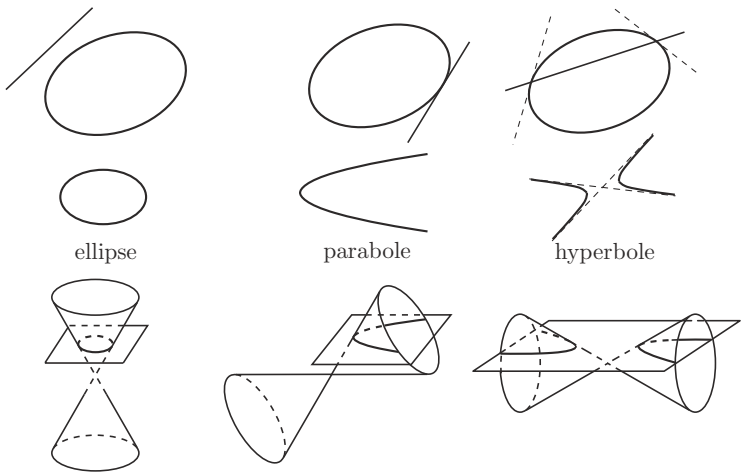


Figure 20

Pour les lectrices qui préfèrent les équations à des figures aussi limpides que celles présentées ici (figure 20), choisissons la droite à l'infini comme la droite d'équation $z = 0$ et décrivons la conique par une équation homogène $Q(x, y, z) = 0$ pour une forme quadratique Q de signature $(2, 1)$. Il y a trois possibilités :

– La conique ne rencontre pas la droite à l'infini, elle est donc entièrement contenue dans le plan affine, c'est une ellipse de ce plan. En équations : la conique a pour équation (par exemple) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, sa partie affine est l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

– La conique est tangente à la droite à l'infini, sa partie affine est une parabole. En équations : on prend $x^2 - yz = 0$ pour la conique, une équation de la partie affine est $y = x^2$.

– La conique rencontre la droite à l'infini en deux points, sa partie affine est une hyperbole, les asymptotes sont les tangentes aux points à l'infini. En équations : $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ pour la conique projective, $x^2 - y^2 = 1$ pour sa partie affine.

Ce que nous venons de décrire peut se paraphraser, de façon un peu pédante, en « deux coniques affines propres sont (affinement) équivalentes si et seulement si

leurs points à l'infini sont des quadriques de dimension 0 projectivement équivalentes ». Nous avons utilisé le fait qu'il n'y a qu'un type de coniques projectives, mais aussi la classification affine : nous savions, par exemple, que les coniques affines sans points à l'infini sont toutes affinement équivalentes... Mais la classification affine peut aussi se déduire de la classification projective, comme nous le montrons maintenant (en toute dimension).

Proposition VII.5.1. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux quadriques d'un espace affine. Pour que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient affinement équivalentes, il faut et il suffit que leurs complétées projectives et leurs quadriques à l'infini soient projectivement équivalentes.*

Pour donner le type affine d'une quadrique, il suffit donc de donner le type de la quadrique complétée et le type de la quadrique à l'infini.

Démonstration. Soient $\mathcal{E}$ l'espace affine dans lequel vivent $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, E sa direction, de sorte que les complétées projectives sont définies par deux formes quadratiques Q et Q' sur $E \oplus \mathbf{K}$. L'hyperplan à l'infini de $P(E \oplus \mathbf{K})$ est l'hyperplan $P(E)$. Une équation pour $\mathcal{C}$ est de la forme

$$f(m) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) \text{ ou } f(u,1) = q(u) + L(u).$$

Une équation pour $\mathcal{C}'$ est

$$f'(u,1) = q'(u) + L'(u) + c'.$$

Les complétées projectives sont les quadriques

$$Q(u,z) = q(u) + zL(u), \quad Q'(u,z) = q'(u) + zL'(u) + z^2c'$$

dans $P(E \oplus \mathbf{K})$ et les quadriques à l'infini $q(u)$, $q'(u)$ dans $P(E)$.

Supposons tout d'abord que les deux quadriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont affinement équivalentes. C'est dire qu'il existe une transformation affine

$$\psi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \text{ telle que } f' \circ \psi(M) = \lambda f(M)$$

(pour un scalaire λ non nul). Avec nos notations,

$$\psi(u,1) = (v + \overrightarrow{\psi}(u), 1) \text{ où } v = \overrightarrow{O\psi(O)},$$

de telle sorte que la condition est équivalente à

$$q' \circ \overrightarrow{\psi}(u) = \lambda q(u), \quad L' \circ \overrightarrow{\psi}(u) + 2\varphi'(v, \overrightarrow{\psi}(u)) = \lambda L(u), \quad q'(v) + L'(v) + c' = 0.$$

La première équation donne l'équivalence des quadriques à l'infini (une des choses que nous voulons montrer), la dernière affirme juste que $\psi(O) \in \mathcal{C}'$.

Rappelons que, grâce à la proposition VI.5.7, ψ se prolonge en un isomorphisme linéaire

$$\begin{array}{rcl} \Psi : E \oplus \mathbf{K} & \longrightarrow & E \oplus \mathbf{K} \\ (u, z) & \longmapsto & (zv + \overrightarrow{\psi}(u), z). \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} Q'(\Psi(u,z)) &= q'(zv + \overrightarrow{\psi}(u)) + zL'(zv + \overrightarrow{\psi}(u)) + z^2 c' \\ &= q'(\overrightarrow{\psi}(u)) + z(L'(\overrightarrow{\psi}(u)) + 2\varphi'(v, \overrightarrow{\psi}(u))) \\ &\qquad + z^2(q'(v) + L'(v) + c'). \end{aligned}$$

De sorte que finalement $Q' \circ \Psi(u,z) = \lambda Q(u,z)$, c'est-à-dire que les deux quadriques projectives sont bien équivalentes.

Supposons réciproquement[10] que les complétées projectives et les quadriques à l'infini soient équivalentes et tâchons d'en déduire une équivalence affine. Les deux hypothèses sont

– qu'il existe un isomorphisme $\Phi \in \mathrm{GL}(E \oplus \mathbf{K})$ avec $Q' \circ \Phi = \lambda Q$ pour un certain scalaire λ non nul

– et qu'il en existe un autre, $\theta \in \mathrm{GL}(E)$, avec $Q'|_E \circ \theta = \mu Q$, toujours pour un scalaire $\mu \neq 0$.

La conclusion, à savoir que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont affinement équivalentes, affirmerait l'existence d'une transformation affine de $\mathcal{E}$, autrement dit, d'un isomorphisme $\Theta \in \mathrm{GL}(E \oplus \mathbf{K})$ envoyant E sur lui-même et tel que

$$Q' \circ \Theta = \nu Q \text{ pour un certain } \nu \neq 0.$$

Pour conclure, on utilise le lemme suivant.

Lemme VII.5.2. *Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel F, soient E et E' des hyperplans de F. On suppose qu'il existe un isomorphisme $u : E \to E'$ avec*

$$Q|_{E'} \circ u = \alpha Q|_E$$

pour un certain scalaire non nul α. Alors il existe un scalaire β non nul et un isomorphisme $\widetilde{u}$ de F tels que $\widetilde{u}(E) = E'$ et $Q \circ \widetilde{u} = \beta Q$.

En effet, on peut appliquer ce lemme à la situation de $F = E \oplus \mathbf{K}$ et de

$$u = \Phi^{-1} \circ \theta : E \longrightarrow E \longrightarrow \Phi^{-1}(E) = E'$$

[10] Cette démonstration m'a été proposée par Michel Coste, en remplacement d'un argument où j'avais appliqué le théorème de Witt trop vite.

qui est un isomorphisme de E muni de $\dfrac{\mu}{\lambda}Q|_E$ sur E' muni de la restriction de Q. Le $\widetilde{u}$ obtenu vérifie

$$\Phi \circ \widetilde{u}(E) = E \text{ et } Q' \circ \Phi \circ \widetilde{u} = \beta\mu Q.$$

Pour la démonstration du lemme VII.5.2, très proche du classique théorème de Witt, je renvoie au § VII.7. □

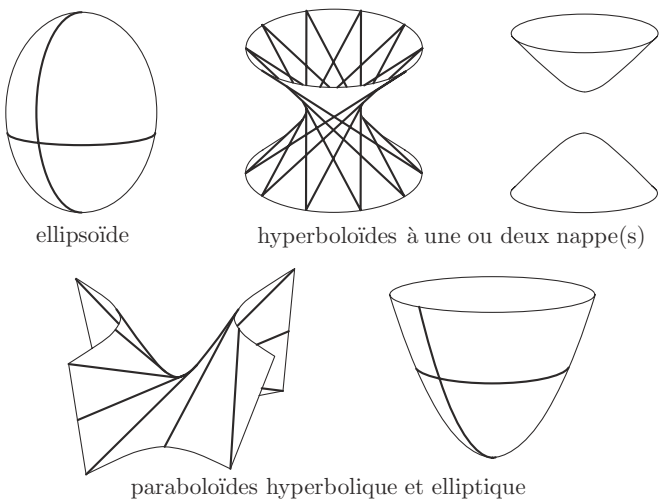


Figure 21

La classification des quadriques réelles propres d'image non vide dans $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ est assez simple, comme nous l'avons remarqué : il n'y a que deux types,

$$\text{I}: \quad x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0 \quad \text{et} \quad \text{II}: \quad x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0.$$

Pour que la forme homogénéisée $q + t(L + ct)$ soit de rang 4, il est nécessaire que la forme initiale q soit de rang au moins 2, de sorte que la conique à l'infini peut être :

- vide (a),
- propre et non vide (b),
- ou dégénérée, d'image un point (c) ou deux droites sécantes (d).

On obtient donc les cinq types de quadriques affines montrés sur la figure 21 :

- ellipsoïde (Ia), $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
- hyperboloïdes à une (IIb) ou deux (Ib) nappes,
- paraboloïdes hyperboliques (IId) ou elliptiques (Ic).

Du point de vue affine, seul le problème du centre n'a pas encore été réglé. Achevons :

Proposition VII.5.3. *Le centre d'une quadrique affine est le pôle de l'hyperplan à l'infini.*

Remarque VII.5.4. Et voilà pourquoi nous n'avons pas trouvé de centre pour la parabole : il était à l'infini !

Démonstration. Soit O le centre de la conique affine à centre $\mathcal{C}$. C'est un centre de symétrie. Soit D une droite passant par O qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points m et m'. Par symétrie, les tangentes à $\mathcal{C}$ en m et m' sont parallèles. Nous savons qu'elles doivent se couper au pôle de D (voir les remarques VII.3.5), donc le pôle de D est sur la droite à l'infini. □

Les propriétés métriques[11]

Nous allons maintenant retrouver les propriétés métriques des coniques (affines euclidiennes) grâce à la géométrie projective. Plaçons-nous donc dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Comme d'habitude (voir au besoin le § VI.3), on considère $\mathcal{P}$ comme le plan affine d'équation $z = 1$ d'un espace vectoriel E de dimension 3 (c'est $\mathcal{P} \times \mathbf{R}$). Maintenant la structure euclidienne de $\mathcal{P}$ est importante, on munit donc E aussi d'une structure euclidienne qui se restreint à la structure donnée sur le plan $\mathcal{P}$:

– Concrètement, un repère orthonormé de $\mathcal{P}$ étant choisi, il définit une base de E dont on décrète qu'elle est orthonormée.

– Encore plus concrètement,

  – l'espace vectoriel E (avec sa base) est $\mathbf{R}^3$ muni de la forme euclidienne standard $x^2 + y^2 + z^2$,

  – le plan affine $\mathcal{P}$, plan d'équation $z = 1$, est dirigé par le plan vectoriel P d'équation $z = 0$, muni de la forme euclidienne standard $x^2 + y^2$,

  – nous nous sommes placés dans le plan projectif $P(E)$ complété de $\mathcal{P}$.

Dans $P(E)$, la forme euclidienne définit une conique, celle d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

On a déjà signalé que l'image de celle-ci est vide... mais qu'elle allait jouer un rôle important. Commençons par lui donner des points : il suffit pour cela de complexifier l'espace E. Comme nous l'avons déjà identifié à $\mathbf{R}^3$ par le choix

[11] Cet exposé des propriétés métriques des coniques *via* la géométrie projective est dû à Plücker.

d'une base, la complexification est totalement indolore, on considère simplement les coordonnées (x, y, z) comme des nombres complexes.

La conique projective d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ a maintenant une image non vide. Comme ce sont les coniques *affines* dans $\mathcal{P}$ qui nous intéressent, il est naturel de regarder où notre forme euclidienne rencontre la droite à l'infini (celle d'équation $z = 0$). Il s'agit des deux points de coordonnées homogènes $(1, \pm i, 0)$.

Définition VII.5.5. On appelle *points cycliques* les deux points I et J de $P(E)$ où la conique projective définie par la structure euclidienne de E rencontre la droite à l'infini de $\mathcal{P}$.

Remarques VII.5.6

– On n'a pas besoin de préciser lequel est I et lequel est J.

– Les coordonnées des points I et J sont conjuguées. En particulier, si I satisfait une équation à coefficients réels (par exemple si une conique réelle passe par I), alors J satisfait la même équation (la conique passe aussi par J).

– Ces points sont imaginaires *et* à l'infini, deux bonnes raisons pour que certains (jeunes) lecteurs ne les aient encore jamais rencontrés.

Avant d'en venir aux coniques, remarquons que l'orthogonalité (au sens euclidien usuel) des droites affines de $\mathcal{P}$, une relation entre deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, s'exprime en termes des points cycliques.

Proposition VII.5.7. *Les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si et seulement si, sur la droite à l'infini, on a*

$$[I, J, \infty_{\mathcal{D}}, \infty_{\mathcal{D}'}] = -1.$$

Démonstration. Nous avons déjà montré ci-dessus (à propos de polarité et dualité, dans la remarque 2) que, si a et b (ici I et J) sont les points d'intersection d'une conique (ici la conique définie par la forme euclidienne) avec une droite (ici la droite à l'infini), deux points m et n (ici $\infty_{\mathcal{D}}$ et $\infty_{\mathcal{D}'}$) représentent des droites vectorielles orthogonales (ici, donc pour le produit scalaire euclidien) si et seulement si on a l'égalité

$$[a, b, m, n] = -1.$$

Il reste à se souvenir que les droites vectorielles du plan vectoriel d'équation $z = 0$ représentant les points à l'infini des droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan affine d'équation $z = 1$ sont les directions de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Elles sont donc orthogonales si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ le sont. □

Passons maintenant aux coniques. Commençons par identifier les cercles.

Proposition VII.5.8. *Les cercles sont les coniques propres qui contiennent les points cycliques.*

Démonstration. Les cercles sont les coniques qui ont une équation de la forme[12]

$$x^2 + y^2 + L(x, y) + c = 0$$

dans un repère orthonormé, c'est-à-dire telles que la partie quadratique d'une de leurs équations soit la forme euclidienne. Les points à l'infini d'un cercle sont donc donnés par les équations

$$z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 = 0.$$

Ce sont donc bien les points cycliques.

Réciproquement, si une conique a pour équation affine

$$q(x, y) + L(x, y) + c = 0,$$

dire qu'elle passe par les points cycliques, c'est dire que la forme quadratique q s'annule en I et J et donc qu'elle est proportionnelle à la forme euclidienne $x^2 + y^2$: la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

est nulle en $(1, \pm i)$ si et seulement si

$$a - c \pm bi = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si $b = 0$ et $a = c$. □

Remarques VII.5.9

– Comparer le corollaire VII.3.9 « par cinq points du plan passe toujours une conique » avec le fait que par trois points du plan passe toujours un cercle.

– Si une conique (réelle) contient le point I, elle doit contenir le point conjugué J. Donc c'est un cercle. Les cercles sont en fait les coniques contenant un des points cycliques.

– Un faisceau de cercles (au sens du § III.4) est un faisceau de coniques contenant les points cycliques. Voir aussi l'exercice VII.57.

– Alors que deux coniques peuvent se couper en quatre points, deux cercles se coupent en au plus deux points. On peut comprendre ça par le calcul : comme les deux équations ont les mêmes termes de plus haut degré (x^2+y^2), rechercher l'intersection de deux cercles revient à chercher celle d'un cercle et une droite... l'axe radical des deux cercles. On peut aussi l'interpréter géométriquement : les deux

[12] Il y a des cercles réduits à des points ou même vides dans cette famille, mais ça n'a pas d'importance.

cercles se coupent en les deux points cycliques[13] et leurs points d'intersection à distance finie.

Tangentes issues des points cycliques

Considérons maintenant une conique affine $\mathcal{C}$ et les tangentes issues des points cycliques. Elles vont nous donner les propriétés métriques voulues.

Supposons d'abord que I (et donc aussi J) soit sur $\mathcal{C}$.

Proposition VII.5.10. *Les tangentes à un cercle aux points cycliques se coupent au centre de ce cercle.*

Démonstration. Les tangentes à $\mathcal{C}$ en I et J se coupent en un point F qui est réel : elles ont des équations conjuguées l'une de l'autre donc leur point d'intersection est réel. Comme il est à l'intersection des tangentes en I et J, ce point est le pôle de la droite IJ, alias la droite à l'infini (figure 22). Donc, grâce à la proposition VII.5.3, F est le centre du cercle ! □

Supposons maintenant que ni I, ni J ne soient sur $\mathcal{C}$, mais que la droite IJ soit tangente à $\mathcal{C}$. On sait qu'alors $\mathcal{C}$ est une parabole.

Proposition VII.5.11. *Soit $\mathcal{C}$ une parabole. La droite IJ est tangente à $\mathcal{C}$. La deuxième tangente à $\mathcal{C}$ issue de I et la deuxième tangente à $\mathcal{C}$ issue de J se coupent au foyer F de $\mathcal{C}$.*

Supposons enfin que I et J soient hors de $\mathcal{C}$ et que la droite IJ ne soit pas tangente à $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ est une ellipse ou une hyperbole.

Proposition VII.5.12. *Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre qui n'est pas un cercle. Soient D_1 et D_2 les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par I, D'_1 et D'_2 les droites complexes conjuguées. Les droites D'_1 et D'_2 sont les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de J. Les points d'intersection F_1 et F_2 de D_1 et D'_1, D_2 et D'_2 (resp.) sont les foyers de $\mathcal{C}$. Leurs polaires par rapport à $\mathcal{C}$ sont les directrices correspondantes.*

Démonstration des propositions VII.5.11 et VII.5.12. Dans chacun des deux cas, considérons une des tangentes D issues de I et D' la droite conjuguée, tangente issue de J. Soit F l'intersection de D et D' et soit Δ la polaire de F par rapport

[13] Les points cycliques sont sur tous les cercles, on peut donc les considérer comme « universellement cocycliques ».

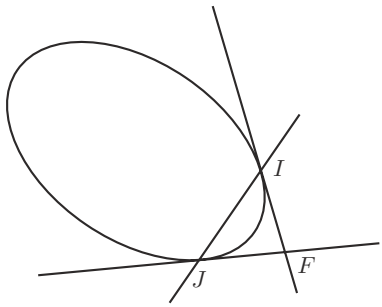


Figure 22

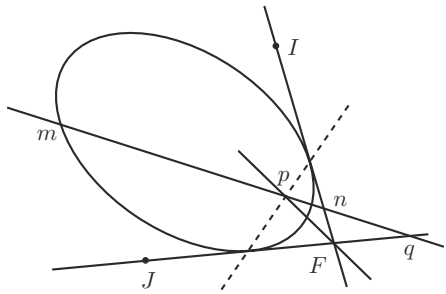


Figure 23

à $\mathcal{C}$. Choisissons deux points m et n quelconques sur $\mathcal{C}$ et appelons p le point d'intersection de mn et de Δ, q le point de mn défini par l'égalité

$$[m, n, p, q] = -1.$$

Ainsi p et q sont orthogonaux par rapport à $\mathcal{C}$. Donc F et q sont tous les deux sur la polaire de p par rapport à $\mathcal{C}$ et donc cette polaire est la droite Fq (figure 23). En particulier, si $q' = Fq \cap \Delta$ et si a et b sont les points de contact de D et D' avec $\mathcal{C}$, on a $[a, b, p, q'] = -1$, c'est-à-dire $[FI, FJ, Fp, Fq] = -1$. Vue sur la droite à l'infini, cette égalité exprime simplement le fait que les droites Fp et Fq sont orthogonales. Comme le faisceau (Fm, Fn, Fp, Fq) est harmonique, c'est dire que Fp et Fq sont les bissectrices de (Fm, Fn) (voir au besoin l'exercice VI.36). On a alors $Fm/Fn = pm/pn$ (voir l'exercice III.23) et $pm/pn = d(m, \Delta)/d(n, \Delta)$ par similitude. En fixant le point n sur $\mathcal{C}$, on en déduit $Fm = ed(m, \Delta)$, ce qu'on voulait démontrer. □

Remarque VII.5.13. Voilà aussi pourquoi nous n'avons pas trouvé de directrice pour le cercle : c'était la droite à l'infini !

On trouvera de jolies applications de ces considérations dans les exercices (par exemple dans l'exercice VII.61).

VII.6. Cercles, inversions, faisceaux de cercles

Au § III.4, on a considéré des équations de cercles pour décrire les faisceaux de cercles du plan affine euclidien. Dans ce chapitre, on a considéré plus généralement des équations de coniques. Je vais expliquer ici ce qui se passait au § III.4 en introduisant (enfin !) le « bon » espace des cercles, celui qui contient à la fois les

cercles, les droites... et les points du plan et dans lequel un faisceau de cercles est, tout simplement, une droite.

À peu près tout ce qui est expliqué ici se généralise à l'espace des sphères d'un espace affine euclidien de dimension n (voir le chapitre 20 de [**5**]).

L'espace des cercles

Plaçons-nous dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Les cercles sont les coniques dont la partie quadratique de l'équation est un multiple non nul de la norme euclidienne :

$$f(M) = \lambda \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

ou encore

$$f(M) = \lambda \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot u + c$$

pour certains scalaires λ (non nul) et c et pour un vecteur u du plan vectoriel P dirigeant $\mathcal{P}$.

Appelons *espace des cercles* de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ l'espace projectif déduit de l'espace vectoriel $P \times \mathbf{R}^2$ de ces équations. Le facteur $\mathbf{R}^2$ est celui où vit le couple (λ, c), le facteur P celui où vit le vecteur u. L'espace des cercles est un espace projectif réel de dimension 3, sous-espace projectif de l'espace de toutes les coniques affines de $\mathcal{P}$.

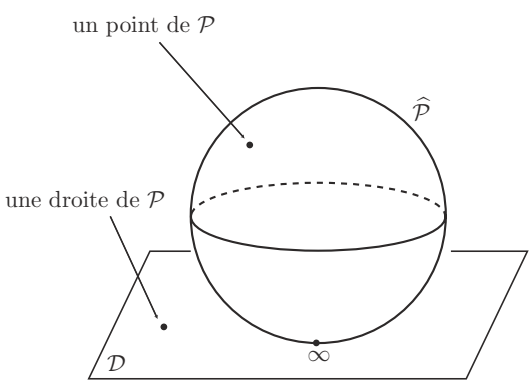


Figure 24. Quadrique fondamentale dans l'espace des cercles

Pour qu'une telle équation décrive vraiment un cercle, il faut qu'elle puisse s'écrire

$$f(M) = \lambda \left(\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - R^2 \right)$$

pour un certain point A, avec λ non nul et $R^2 > 0$, c'est-à-dire, comme

$$R^2 = \|u\|^2 - \lambda c,$$

que l'on ait

$$\lambda \neq 0 \text{ et } \|u\|^2 - \lambda c > 0.$$

L'espace $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ contient donc :

– les vrais cercles (correspondant à $\lambda \neq 0$ et $\|u\|^2 - \lambda c > 0$),
– les « cercles-points » (correspondant à $\lambda \neq 0$ et $\|u\|^2 - \lambda c = 0$),
– les cercles de rayon imaginaire[14], d'image vide (correspondant à $\lambda \neq 0$ et $\|u\|^2 - \lambda c < 0$),
– mais aussi les droites affines de $\mathcal{P}$ (correspondant à $\lambda = 0$ et $u \neq 0$),
– et l'équation correspondant à $\lambda = 0$ et $u = 0$, dont la conique image est vide.

La quadrique fondamentale

Un rôle important est donc joué par la quadrique projective d'équation

$$r(u, \lambda, C) = \|u\|^2 - \lambda c.$$

L'image de cette quadrique est constituée des cercles-points auxquels il faut ajouter le point $(0, 0, 1)$. En d'autres termes, elle s'identifie à la réunion de l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ et d'un point supplémentaire, que nous n'allons pas manquer d'appeler point à l'infini. Cette quadrique est bien, en effet, notre vieux $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, même comme espace topologique : la signature de la forme quadratique r est $(3, 1)$ puisque $r(u, \lambda, c) = \|u\|^2 + \frac{1}{4}\left[(\lambda - c)^2 - (\lambda + c)^2\right]$, son image est contenue dans le sous-espace affine $\lambda + c \neq 0$ de $\mathcal{P}$... où il est clair qu'elle (la quadrique image) est homéomorphe à une sphère de dimension 2 (c'est dans ce sous-espace que sont faits tous les dessins de cette partie).

Remarque VII.6.1. On a ainsi *plongé* la sphère $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, dont le § VI.7 nous avait bien montré l'utilité pour l'étude des cercles, dans l'espace des cercles.

Appelons $\mathcal{D}$ l'hyperplan projectif d'équation $\lambda = 0$. On a vu qu'il est constitué des droites affines de $\mathcal{P}$ ($\lambda = 0$ et $u \neq 0$), ensemble auquel il faut ajouter le point ∞. On remarquera que $\widehat{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{D}$ sont tangents en ∞ (figure 24).

En résumé, l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ contient à la fois l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites affines[15] de $\mathcal{P}$ (un plan projectif) et l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ (une quadrique $\widehat{\mathcal{P}}$) tangents

[14] Appelés autrefois « pseudo-réels » (voir [**16**]). Ce sont des cercles réels (puisque d'équation réelle) sans point réel (puisque d'image vide).

[15] L'ensemble des droites affines de $\mathcal{P}$ est ici $\mathcal{D} - \{\infty\}$. C'est le complémentaire d'un point dans un plan projectif (voir l'exercice VI.43).

en un point (noté ∞). C'est une autre façon d'expliquer pourquoi le plan $\mathcal{P}$ a été complété, au § VI.7, par l'ajout d'un point plutôt que d'une droite.

Les cercles et leurs centres

La quadrique $\widehat{\mathcal{P}}$ partage l'espace projectif $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ en deux composantes. J'appellerai *intérieur* de $\widehat{\mathcal{P}}$ l'ensemble des points vérifiant $r(u, \lambda, c) < 0$, c'est-à-dire celui des cercles de rayon imaginaire, et *extérieur* de $\widehat{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vrais cercles.

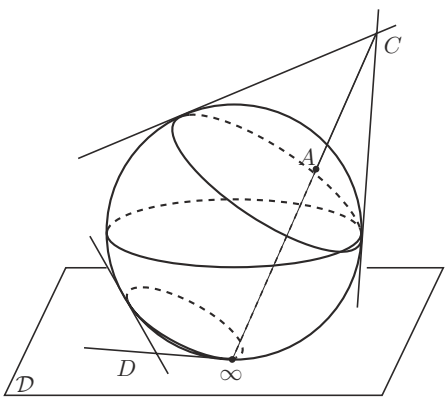


Figure 25. Les cercles, leurs centres, les droites

Tout cercle a un centre... autrement dit, à tout point C de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$, on peut associer un point de $\widehat{\mathcal{P}}$, le point A où la droite $C\infty$ recoupe $\widehat{\mathcal{P}}$ (on va maintenant utiliser systématiquement et intensivement l'intersection des droites et de la quadrique). On remarquera que les cercles de rayon imaginaire ont un centre et que les droites ont un centre... en ∞ (figure 25).

Mais le point C de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ est un cercle de $\mathcal{P}$, donc une partie de $\widehat{\mathcal{P}}$ (ce que montre aussi la figure 25) : les points de C sont les points M de $\widehat{\mathcal{P}}$ tels que la droite CM soit tangente à $\widehat{\mathcal{P}}$. Le cercle C de $\widehat{\mathcal{P}}$ est donc l'intersection de $\widehat{\mathcal{P}}$ avec le plan polaire du point C par rapport à la quadrique $\widehat{\mathcal{P}}$, plan que je noterai $C^{\perp}$.

On verra aussi dans cette description une confirmation du fait que les cercles imaginaires n'ont pas de point et que les droites passent par ∞.

Inversions

Tout cercle C non réduit à un point définit une inversion, c'est-à-dire une transformation de $\widehat{\mathcal{P}}$. Il s'agit de l'involution qui, au point M de $\widehat{\mathcal{P}}$, associe le deuxième point d'intersection M' de CM avec $\widehat{\mathcal{P}}$ (figure 26). On remarquera que

– cette transformation échange bien le centre A de C, pôle de l'inversion, et le point ∞,

– les droites définissent aussi des inversions, dont le pôle est à l'infini (il s'agit, bien sûr, des réflexions).

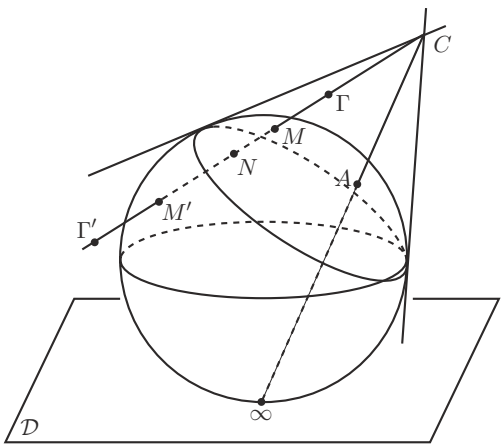


Figure 26. Images de cercles et de points par une inversion

Une inversion transforme tout cercle en un cercle, on doit donc aussi la voir opérer sur $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. À Γ, l'inversion de cercle C associe le point Γ' tel que

$$[C, N, \Gamma, \Gamma'] = -1,$$

où N désigne le point d'intersection de $C\Gamma$ avec le plan $C^\perp$ défini par C (figure 26). L'inversion, ainsi définie, est une *homographie* de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Cercles orthogonaux, faisceaux de cercles

La polarité par rapport à $\widehat{\mathcal{P}}$ décrit l'orthogonalité des cercles : les cercles C et C' sont orthogonaux si C' est dans le plan polaire $C^\perp$ de C (et inversement). Par exemple, les points de C (s'il en a) sont des cercles-points orthogonaux à C'. Le plan $C^\perp$ rencontre l'espace $\mathcal{D}$ des droites le long d'une droite projective $\mathcal{F}$ qui est l'ensemble des diamètres de C (figure 27). On remarquera encore :

– que les cercles orthogonaux à C sont les points fixes de l'inversion de cercle C opérant sur l'espace des cercles

– et que les deux notions d'orthogonalité dont nous disposons pour les droites coïncident : sur $\mathcal{D}$, on a $\lambda = 0$ et les deux orthogonalités sont définies par le produit scalaire euclidien du plan.

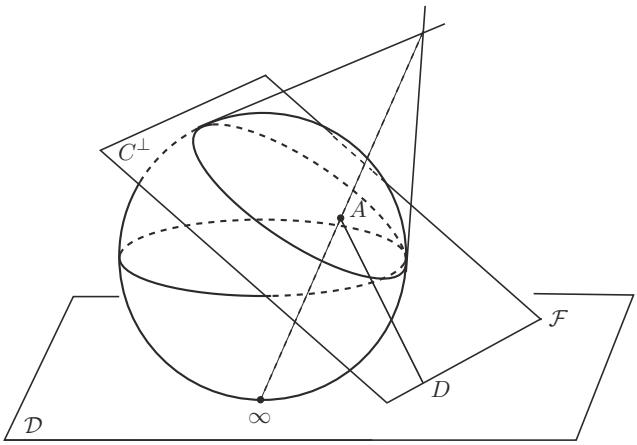


Figure 27. Diamètres d'un cercle

Venons-en aux faisceaux de cercles. Nous avons déjà beaucoup utilisé les droites de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Une droite est un ensemble de cercles, et c'est ce qu'on appelle un *faisceau* de cercles. La droite orthogonale $\mathcal{F}^\perp$ par rapport à la quadrique est le faisceau orthogonal. Les différents types de faisceaux rencontrés au § III.4 sont tout simplement les différentes manières possibles, pour une droite $\mathcal{F}$ de rencontrer une quadrique dans un espace projectif réel (voir le § VII.1).

– Si les deux points d'intersection sont imaginaires, tous les cercles du faisceau sont de vrais cercles. Il s'agit d'un faisceau de cercles sécants, les deux points bases du faisceau sont les points de $\mathcal{F}^\perp \cap \widehat{\mathcal{P}}$. La droite $\mathcal{F}$ rencontre $\mathcal{D}$ en un point D qui est l'axe radical du faisceau.

– Inversement, une droite rencontrant $\widehat{\mathcal{P}}$ en deux points (autres que ∞) est un faisceau à points limites : ces faisceaux contiennent des cercles-points et des cercles à rayon imaginaire. On aura remarqué que $\mathcal{F}$ coupe $\widehat{\mathcal{P}}$ en deux points si et seulement si $\mathcal{F}^\perp$ ne rencontre pas $\widehat{\mathcal{P}}$.

– Une droite $\mathcal{F}$ tangente à $\widehat{\mathcal{P}}$ en un point autre que ∞ est un faisceau de cercles tangents.

– Si $\mathcal{F}$ coupe $\widehat{\mathcal{P}}$ en ∞ et en un autre point A, tous les cercles de $\mathcal{F}$ sont centrés en A, il s'agit d'un faisceau de cercles concentriques. Il n'y a pas d'axe radical... celui-ci étant parti à l'infini (et plus précisément en ∞).

– Si $\mathcal{F}$ est contenue dans $\mathcal{D}$ mais ne passe pas par ∞, le faisceau est formé de droites. Comme on l'a remarqué plus haut, ces droites sont les diamètres d'un cercle (figure 27), il s'agit donc d'un faisceau de droites concourantes. La droite $\mathcal{F}^\perp$ contient ∞ et relève du cas précédent.

– Le dernier cas est celui d'une droite $\mathcal{F}$ contenue dans $\mathcal{D}$ et qui passe par ∞. Alors les droites du faisceau $\mathcal{F}$ ne se coupent qu'en ∞, il s'agit d'un faisceau de droites parallèles. Le faisceau orthogonal est de même nature.

Inverse d'un faisceau

Une inversion transforme un faisceau en faisceau (les homographies préservent les droites !).

Le groupe circulaire

Considérons maintenant le groupe $\mathcal{G}$ des homographies de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ qui préservent la quadrique $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Elles opèrent sur $\widehat{\mathcal{P}}$ et la restriction définit un homomorphisme Φ de $\mathcal{G}$ dans le groupe de toutes les transformations de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Théorème VII.6.2. *La restriction à $\widehat{\mathcal{P}}$ définit un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur le groupe circulaire de $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\widehat{\mathcal{P}}$ contient des repères projectifs de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ et donc que tout élément de $\mathcal{G}$, qui est une homographie, est bien déterminé par sa restriction à $\widehat{\mathcal{P}}$. Ainsi Φ est injective.

D'autre part, le groupe circulaire est engendré par les inversions, dont nous avons vu qu'elles proviennent de $\mathcal{G}$. L'image de Φ contient donc le groupe circulaire.

Il reste à vérifier que cette image est contenue dans le groupe circulaire. Par définition, les éléments de $\Phi(\mathcal{G})$ préservent l'ensemble des cercles de $\widehat{\mathcal{P}}$. C'est donc le théorème VI.7.11 qui permet de conclure. □

VII.7. Rappels sur les formes quadratiques

Voici quelques rappels succincts sur les formes quadratiques. On a déjà utilisé des exemples de formes quadratiques, les produits scalaires, dans les chapitres euclidiens précédents.

Dans ce paragraphe, $\mathbf{K}$ désigne un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$, $\varphi : E \times E \to \mathbf{K}$ une forme bilinéaire symétrique et enfin $q : E \to \mathbf{K}$ la forme quadratique associée à φ.

On dit que φ est la *forme polaire* de q. Rappelons qu'on définit q à partir de φ par

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

ou φ à partir de q par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

ou encore par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)].$$

Calcul différentiel

La forme polaire est essentiellement la différentielle de la forme quadratique : on fixe une norme $\|\cdot\|$ sur E et on écrit

$$q(x+h) = q(x) + 2\varphi(x,h) + q(h).$$

Le terme $q(h)$ est quadratique (!) en h, c'est donc un $o(\|h\|)$. Ainsi q est différentiable en x (pour tout x) et sa différentielle est la forme linéaire

$$dq_x : h \longmapsto 2\varphi(x,h).$$

Non-dégénérescence

La forme bilinéaire φ définit une application linéaire $\widetilde{\varphi}$:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : E & \longrightarrow & E^\star \\ x & \longmapsto & (y \mapsto \varphi(x,y)). \end{array}$$

On dit que φ (ou q) est *non dégénérée* quand $\widetilde{\varphi}$ est injective. Comme E est de dimension finie, il est équivalent de dire que $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme. Dire que φ est non dégénérée, c'est dire que, si $\varphi(x,y) = 0$ pour tout y, alors $x = 0$.

Orthogonalité

Deux vecteurs x et y sont dits *orthogonaux* si $\varphi(x,y) = 0$. Une base formée de vecteurs orthogonaux deux à deux est dite *orthogonale*. Un vecteur x non nul est dit *isotrope* si $q(x) = 0$, c'est-à-dire s'il est orthogonal à lui-même.

Si F est un sous-espace de E, son orthogonal $F^\perp$ est le sous-espace

$$F^\perp = \{x \in E \mid \varphi(x,y) = 0 \quad \forall\, y \in F\}$$

de tous les vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F. Si φ est non dégénéré, $F^\perp$ est envoyé, par $\widetilde{\varphi}$, sur l'annulateur F° de F (sous-espace que nous avons noté F' au § VI.4)

$$F^\circ = \{f \in E^\star \mid f|_F = 0\}.$$

Sous cette hypothèse de non-dégénérescence, on a

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

(en utilisant une base de F complétée en une base de E et la base duale de $E^\star$, voir l'exercice VI.1). Remarquons que F et $F^\perp$ peuvent avoir une intersection non triviale. Par exemple, dire que x est isotrope, c'est dire que $\langle x\rangle \subset \langle x\rangle^\perp$.

Calcul dans une base

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors φ est bien déterminée par les valeurs des $\varphi(e_i, e_j)$, un tableau carré de nombres qu'on arrange comme une matrice $A = (\varphi(e_i, e_j)_{1\le i,j\le n})$ qui est symétrique, c'est-à-dire qui vérifie l'égalité ${}^tA = A$.

On peut écrire $\varphi(x, y)$ comme un produit de matrices (en écrivant encore x pour la matrice colonne qui donne les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$) :

$$\varphi(x, y) = {}^txAy.$$

Attention, A n'est *pas* une matrice d'endomorphisme, la meilleure preuve en est la façon dont elle se transforme par changement de base : si $(e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base et si S est la matrice de $(e'_1, \dots, e'_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, avec des notations évidentes, $x = Sx'$, $y = Sy'$ et

$${}^txAy = {}^t(Sx')A(Sy') = {}^tx'({}^tSAS)y'$$

ce qui est bien de la forme ${}^tx'A'y'$... mais avec une matrice transformée $A' = {}^tSAS$.

Classification

Proposition VII.7.1. *Pour toute forme quadratique q, il existe une base orthogonale.*

Démonstration. Si $q = 0$, toutes les bases conviennent. Sinon, soit x un vecteur non nul tel que $q(x) \neq 0$. La forme linéaire $\widetilde{\varphi}(x) \in E^\star$ est non nulle, puisque

$$\widetilde{\varphi}(x)(x) = q(x) \neq 0.$$

Son noyau est donc un hyperplan de E, noté $x^\perp$ (c'est l'orthogonal de x). Ainsi E est somme directe orthogonale (pour q) de $x^\perp$ et de la droite engendrée par x. On peut alors conclure par récurrence sur la dimension de E, le résultat étant évidemment vrai en dimension 1. □

Corollaire VII.7.2. *Il existe un entier R, des scalaires λ_i tous non nuls et une base de E dans laquelle on a*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i x_i^2$$

(égalité dans laquelle $(x_1, \ldots, x_n)$ désignent les coordonnées du vecteur x). De plus, si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il existe une base dans laquelle on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^{R} x_i^2.$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, il existe une base dans laquelle on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{R} x_i^2.$$

Démonstration. On écrit tout simplement q dans une base orthogonale. Dans le cas complexe, on remplace ensuite x_i par $\mu_i x_i$ (où μ_i est une racine carrée de λ_i) pour obtenir l'expression voulue. Dans le cas réel, on utilise de la même façon des racines carrées des λ_i qui sont positifs et des racines carrées des opposés de ceux qui sont négatifs. □

Le nombre entier R qui apparaît dans cet énoncé est appelé le *rang* de la forme quadratique q. C'est aussi le rang de l'application linéaire $\widetilde{\varphi} : E \to E^\star$ (voir l'exercice VII.7). Disons que deux formes quadratiques q sur E et q' sur E' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ tel que $q' \circ f = q$.

Remarque VII.7.3. Soient q et q' deux formes équivalentes. Alors q est non dégénérée si et seulement si q' l'est. En effet, si elles sont équivalentes par un isomorphisme f, leurs formes polaires sont reliées par l'isomorphisme f. On remarque ensuite l'égalité des applications

$${}^t f \circ \widetilde{\varphi'} \circ f = \widetilde{\varphi}$$

de E dans $E^\star$: on a

$${}^t f \circ \widetilde{\varphi} \circ f(x) = {}^t f \circ \widetilde{\varphi'}(f(x)),$$

et $\widetilde{\varphi'}(f(x))$ est la forme linéaire sur E' qui, à y', associe $\varphi'(f(x), y)$, de sorte que ${}^t f \circ \widetilde{\varphi'} \circ f(x)$ est la forme linéaire sur E qui, à y, associe $\varphi'(f(x), f(y))$ qui, par définition, est égal à $\varphi(x, y)$. On a donc bien l'égalité annoncée. Comme f est un isomorphisme, $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme si et seulement si $\widetilde{\varphi'}$ l'est.

Quand le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on a des résultats plus précis.

Corollaire VII.7.4. *Deux formes quadratiques complexes sont équivalentes si et seulement si elles sont définies sur des espaces de même dimension et si elles ont le même rang.* □

***Corollaire VII.7.5* (Loi d'inertie de Sylvester).** *Deux formes quadratiques réelles sont équivalentes si et seulement si elles sont définies sur des espaces de la même dimension et peuvent s'écrire*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+r} x_i^2, \qquad q'(y) = \sum_{i=1}^{s'} y_i^2 - \sum_{i=s'+1}^{s'+r'} y_i^2$$

avec $r = r'$, $s = s'$.

Remarque VII.7.6. En particulier le couple (s, r) ne dépend que de la forme quadratique q et pas de la base dans laquelle elle est écrite. On l'appelle la *signature* de la forme quadratique. Le rang de la forme quadratique est $R = s + r$.

Démonstration. Si $r = r'$ et $s = s'$, il est clair que les formes sont équivalentes. Réciproquement, pour montrer que ces données numériques coïncident quand les formes sont équivalentes, il suffit de les caractériser de façon géométrique. Définissons donc deux entiers σ et ρ, le premier (resp. le deuxième) comme la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel q est définie positive (resp. négative). Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base dans laquelle la forme quadratique q s'écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+r} x_i^2.$$

Soit A le sous-espace engendré par $(e_1, \ldots, e_s)$. La forme q est définie positive sur A donc on a $\sigma \geq s$ et de même, $\rho \geq r$. Soit B le sous-espace engendré par $(e_{s+1}, \ldots, e_r, \ldots, e_n)$ et soit F n'importe quel sous-espace tel que la restriction $q|_F$ soit définie positive. Alors l'intersection $F \cap B$ se réduit à 0. On a donc

$$\dim F + \dim B \leq n.$$

Autrement dit, $\sigma + n - s \leq n$, soit $\sigma \leq s$. On a donc $\sigma = s$. On montre de même l'égalité $\rho = r$. □

La classification des formes quadratiques pour $\mathbf{K} = \mathbf{F}_q$ n'est pas très compliquée non plus. Elle fait l'objet de l'exercice VII.67.

La méthode de Gauss

C'est une démonstration constructive (et calculatoire) de l'existence de bases orthogonales. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension n de l'espace E. Supposons-le vrai pour toutes les formes quadratiques en (au plus) $n - 1$

variables et considérons une forme quadratique q en n variables. On l'écrit dans une base :

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j.$$

Alors de deux choses l'une[16], soit il y a un terme diagonal non nul, soit non.

– S'il y a un terme diagonal non nul, quitte à changer la numérotation des vecteurs de base, on peut supposer que $a_{1,1} = \lambda_1 \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned} q(x) &= \lambda_1 x_1^2 + 2A(x_2, \ldots, x_n)x_1 + B(x_2, \ldots, x_n) \\ &= \lambda_1 \left(x_1 + \frac{A}{\lambda_1}\right)^2 + \left(B - \frac{A^2}{\lambda_1}\right), \end{aligned}$$

formules dans lesquelles A est une forme linéaire et B une forme quadratique. C'est dire qu'on a écrit

$$q(x) = \lambda_1 x_1'^2 + C(x_2, \ldots, x_n)$$

où x_1' est une forme linéaire en $x_1, \ldots, x_n$ indépendante de $x_2, \ldots, x_n$ et C une forme quadratique en $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$.

– Si $a_{i,i} = 0$ pour tout i, comme $q \neq 0$, il y a un coefficient $a_{i,j}$ non nul. On peut supposer que c'est $\lambda = a_{1,2}$. Comme ci-dessus, on écrit

$$q(x) = \lambda x_1 x_2 + A(x_3, \ldots, x_n)x_1 + B(x_3, \ldots, x_n)x_2 + C(x_3, \ldots, x_n)$$

où A et B sont des formes linéaires et C une forme quadratique en $n-2$ variables. On factorise (de force) :

$$\begin{aligned} q(x) &= \lambda \left(x_1 + \frac{B}{\lambda}\right)\left(x_2 + \frac{A}{\lambda}\right) + C - \frac{AB}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{4}\left(\left(x_1 + x_2 + \frac{A+B}{\lambda}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 - \frac{A-B}{\lambda}\right)^2\right) + C - \frac{AB}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ce qu'on obtient est la différence des carrés de deux formes linéaires indépendantes (parce que $x_1 + x_2$ et $x_1 - x_2$ sont indépendantes) en $x_1, \ldots, x_n$ à laquelle s'ajoute une forme quadratique $(C - AB/\lambda)$ dans laquelle les variables x_1 et x_2 n'apparaissent pas.

Cette étude permet de conclure par récurrence sur n. □

Remarque VII.7.7. La méthode de Gauss est une méthode pratique de réduction : c'est effectivement ce que l'on fait lorsque l'on veut écrire explicitement une forme

[16] l'autre, c'est le Soleil [**42**].

quadratique donnée comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On en trouvera des exemples dans les exercices.

Orthogonalisation simultanée[17]

On suppose maintenant que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que E est un espace vectoriel *euclidien*. Ce qui veut dire qu'il est déjà muni d'une forme quadratique q définie positive. On étudie la possibilité de « diagonaliser » une autre forme q' dans une base orthonormée (pour q), en d'autres termes, on cherche une base dans laquelle les deux formes q et q' sont toutes les deux écrites comme sommes de carrés. C'est un résultat très utile, c'est lui qui dit, par exemple, qu'une conique à centre a des axes de symétrie orthogonaux (proposition VII.2.1), on l'utilisera aussi au chapitre IX à propos de la courbure des surfaces.

Théorème VII.7.8. *Si q est une forme quadratique définie positive et q' une forme quadratique (quelconque), il existe une base orthonormée pour q qui est orthogonale pour q'.*

Démonstration. La forme q est définie positive. Elle définit un produit scalaire. Notons donc $q = \|\cdot\|^2$ et $\varphi(x, y) = x \cdot y$. La démonstration proposée ici est par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel E. Le résultat est certainement vrai en dimension 1. Supposons-le démontré en dimension $n - 1$.

On se place en dimension n. On va chercher un vecteur e_1 de norme 1 dans E tel que, si x est orthogonal à e_1 pour q (c'est-à-dire si $e_1 \cdot x = 0$), alors il lui est aussi orthogonal pour q' (c'est-à-dire $\varphi'(e_1, x) = 0$).

On décomposera ensuite E en somme directe orthogonale (pour q) :

$$E = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^{\perp}.$$

Avec la propriété vérifiée par e_1, l'orthogonal de e_1 pour q' contient l'hyperplan $\langle e_1 \rangle^{\perp}$. Il est donc égal, soit à E tout entier, soit à l'orthogonal de e_1. Dans tous les cas, si u est un vecteur de $\langle e_1 \rangle^{\perp}$, on a

$$q'(xe_1 + u) = \lambda x^2 + q'(u)$$

pour un certain λ (peut-être nul) et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-espace $e_1^{\perp}$.

[17] Il est traditionnel d'appeler aussi « diagonalisation » l'orthogonalisation des formes quadratiques, même si cette opération est différente de la diagonalisation des matrices et si cette terminologie peut porter à confusion. Voir l'exercice VII.5.

Montrons donc l'existence d'un tel vecteur e_1. Comme on le cherche de norme 1, il est bien naturel de considérer la sphère unité S de notre espace euclidien. On définit une fonction $f : E - \{0\} \to \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{q'(x)}{\|x\|^2}.$$

Comme la sphère S est compacte (l'espace vectoriel E est de dimension finie) et l'application $f|_S$ continue (pourquoi ?), elle atteint son maximum (par exemple) en un point e_1 de S. Comme on a

$$f(\lambda x) = f(x) \text{ pour tout } x,$$

le vecteur e_1 réalise aussi le maximum de f sur $E - \{0\}$.

Maintenant, f est une application différentiable (pourquoi ?) définie sur l'ouvert $E - \{0\}$ de l'espace vectoriel normé E. Si elle atteint un extremum en un point e_1, sa différentielle doit s'annuler en ce point. On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= df_{e_1}(x) = \frac{1}{\|e_1\|^4}\Big(2\varphi'(e_1, x)\,\|e_1\|^2 - 2q'(e_1)(e_1 \cdot x)\Big) \\ &= 2\varphi'(e_1, x) - 2q'(e_1)(e_1 \cdot x) \quad \forall\, x \in E. \end{aligned}$$

Donc, pour tout x dans E, l'orthogonalité de x et de e_1 (c'est-à-dire l'égalité $e_1 \cdot x = 0$) implique l'égalité $\varphi'(e_1, x) = 0$. □

Remarque VII.7.9. La fonction f atteint son maximum en e_1 et on a $f(e_1) = q'(e_1)$. La démonstration précédente construit par récurrence une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ qui est orthogonale pour q' et dont les vecteurs sont simplement des points critiques de f. Dans cette base, la forme s'écrit

$$q'(x) = \sum_{i=1}^{n} q'(e_i)x_i^2.$$

Le théorème de Witt

Un autre résultat utile sur les formes quadratiques est le théorème de Witt, qui affirme que, si la forme quadratique q est non dégénérée et si ses restrictions $q|_F$ et $q|_{F'}$ à deux sous-espaces sont équivalentes par un isomorphisme $F \to F'$, cet isomorphisme se prolonge à l'espace tout entier.

***Théorème VII.7.10* (Witt).** *Soit q une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel E. Soient F et F' deux sous-espaces de E et $u : F \to F'$ un*

isomorphisme linéaire tel que $q \circ u(x) = q(x)$ pour tout $x \in F$ (u est une isométrie de $q|_F$ sur $q|_{F'}$). Alors il existe un isomorphisme linéaire $\widetilde{u} : E \to E$ qui prolonge u et tel que $q \circ \widetilde{u} = q$ ($\widetilde{u}$ est une isométrie de q).

Ce théorème a de nombreuses applications (voir, par exemple, [**5, 39, 48**]). Une variante, le lemme VII.5.2 s'applique aux quadriques (pour la proposition VII.5.1 ci-dessus). Voir aussi l'exercice VII.72.

Démonstration. Commençons par démontrer le théorème dans le cas où $q|_F$ est non dégénérée, par récurrence sur la dimension r de F.

Si $r = 1$, F est engendrée par un x tel que $q(x) \neq 0$. Posons $y = u(x)$; on a $q(y) = q(u(x)) = q(x)$, de sorte que

$$q(x+y) + q(x-y) = 4q(x) \neq 0.$$

Ainsi, au moins un des deux vecteurs $x + \varepsilon y$ (pour $\varepsilon = \pm 1$) n'est pas isotrope et $H = (x+\varepsilon y)^{\perp_q}$ est un hyperplan contenant $x - \varepsilon y$. Si s_H désigne la réflexion par rapport à H,

$$s_H(x+\varepsilon y) = -(x+\varepsilon y), \qquad s_H(x-\varepsilon y) = x - \varepsilon y$$

donc $-\varepsilon s_H$ prolonge u.

Supposons donc que le théorème soit vrai pour tous les sous-espaces de dimension $\leq r$ et considérons un sous-espace F de dimension $r+1$ (tel que $q|_F$ soit non dégénérée). Soit x_1 un vecteur non isotrope de F et soit F_1 son orthogonal dans F. C'est un sous-espace de dimension r de E, $q|_{F_1}$ est non dégénérée, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver un prolongement u_1 de $u|_{F_1}$ à E. Remarquons que $u_1^{-1} \circ u|_{F_1} = \mathrm{Id}_{F_1}$. Pour prolonger u, il suffit de prolonger $u_1^{-1} \circ u$, de sorte que l'on peut supposer (et que nous supposerons donc) que $u|_{F_1} = \mathrm{Id}_{F_1}$. Considérons $x_1 \in F_1^{\perp}$. En utilisant le cas $r = 1$ (initialisation de la récurrence) pour $\langle x_1 \rangle \subset F_1^{\perp}$, on déduit une isométrie $u_2 \circ u$ de $q|_{F_1^{\perp}}$ et l'application $\mathrm{Id}_{F_1} \oplus u_2$ est le prolongement désiré de Id_{F_1}.

Ceci termine la démonstration dans le cas où $q|_F$ est non dégénérée. Supposons maintenant que ce ne soit pas le cas et appelons K_0 le noyau de $q|_F$, et F_0 un supplémentaire,

$$F = K_0 \oplus F_0.$$

Soit $x_1, \ldots, x_s$ une base de K_0. Nous utilisons le lemme suivant :

Lemme VII.7.11. *Il existe des vecteurs $y_1, \ldots, y_s \in E$ tels que, sur chaque plan $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$, la restriction de q ait pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les sous-espaces $F_0, P_1, \ldots, P_s$ sont orthogonaux deux à deux et en somme directe dans E.*

Admettant ce lemme pour le moment et finissons la démonstration du théorème de Witt. Posons $x'_i = u(x_i) \in F'$. Comme u est une isométrie de $q|_F$, le sous-espace $\langle x'_1, \dots, x'_s \rangle$ est le noyau de $q|_{F'}$. En appliquant le lemme à F', on obtient des vecteurs $y'_1, \dots, y'_s$ et on prolonge u à $P_1 \oplus \cdots \oplus P_s \oplus F_0$ en demandant que $\overline{u}(y_i) = y'_i$. Nous avons ainsi une isométrie des restrictions de q

$$\overline{u} : \overline{F} = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s \oplus F_0 \longrightarrow \overline{F'} = P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_s \oplus F'_0$$

et maintenant $q|_{\overline{F}}$ est non dégénérée par construction, de sorte que l'on peut lui appliquer le résultat obtenu dans ce cas. □

Démonstration du lemme. On construit les vecteurs $y_1, \dots, y_s$ par récurrence. On commence par y_1. Le vecteur x_1 est un vecteur non nul de K_0. Remarquons que la forme quadratique q restreinte à $F_0^\perp$ est non dégénérée, de sorte qu'il existe un vecteur y dans $F_0^\perp$ tel que $\varphi(x_1, y) = a \neq 0$, il existe donc un vecteur y' tel que $\varphi(x_1, y') = 1$ et $y_1 = y' - \dfrac{q(y)}{2} x_1$ jouit des propriétés espérées. Soit $P_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$, on considère alors

$$F_1 = P_1 \oplus \langle x_2, \dots, x_s \rangle \oplus F_0.$$

C'est une somme directe orthogonale, le noyau de $q|_{F_1}$ est $\langle x_2, \dots, x_s \rangle$ et le résultat s'ensuit par récurrence. □

Il nous reste à démontrer le lemme VII.5.2 utilisé pour la classification affine/projective des quadriques au § VII.5. Ce lemme est très proche du théorème de Witt, mais il y a quelques différences. Les sous-espaces sont des hyperplans dans le lemme alors que leur codimension peut être quelconque dans le théorème de Witt ; la forme quadratique est quelconque dans le lemme alors qu'elle est non dégénérée dans le théorème. C'est la présence de la constante multiplicative α qui empêche d'appliquer directement le théorème de Witt à la classification des quadriques. De même que la démonstration qui suit, ces remarques sont dues à Michel Coste.

Démonstration du lemme VII.5.2. Changeons un peu les notations pour rester en cohérence avec l'énoncé et la démonstration du théorème de Witt. Appelons E l'espace ambiant et $n+1$ sa dimension, F et F' les deux hyperplans et q la forme quadratique. On a un isomorphisme $u : F \to F'$ avec $q|_{F'} \circ u = \alpha q|_F$ que l'on souhaite prolonger.

Supposons d'abord que q et sa restriction $q|_F$ soient toutes deux non dégénérées. On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de F orthogonale pour q. Soient $(e'_1, \dots, e'_n)$ les images de ces vecteurs par u. Si $q(e_i) = a_i$, $q(e'_i) = \alpha a_i$. Complétons $(e_1, \dots, e_n)$

et $(e'_1, \dots, e'_n)$ en des bases orthogonales $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ et $(e'_1, \dots, e'_n, f'_{n+1})$ de E. On a

$$q\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^2 \text{ et } q\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e'_i + y_{n+1} f'_{n+1}\right) = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} a_i y_i^2 + a'_{n+1} y_{n+1}^2.$$

Le quotient des déterminants des deux matrices diagonales représentant q dans ces deux bases est un carré (une remarque facile, voir l'exercice VII.66), disons δ^2, et l'on a

$$\alpha^n a'_{n+1} = \delta^2 a_{n+1}.$$

Si $n = 2k+1$ est impair, on pose

$$e'_{n+1} = \frac{\alpha^{k+1}}{\delta} f'_{n+1},$$

de sorte que $q(e'_{n+1}) = \alpha a_{n+1}$ et qu'il suffit de poser $\widetilde{u}(e_i) = e'_i$ pour $1 \leq i \leq n+1$ pour avoir $q \circ \widetilde{u} = \alpha q$ comme espéré.

Si $n = 2k$ est pair, on pose

$$e'_{n+1} = \frac{\alpha^{k}}{\delta} f'_{n+1},$$

de sorte que l'on a cette fois $q(e'_{n+1}) = a_{n+1} = q(e_{n+1}) \neq 0$ (on a supposé q non dégénérée). Comme dans le début de la démonstration du théorème de Witt, il y a une réflexion σ qui envoie e_{n+1} sur e'_{n+1} et, puisque c'est une isométrie, envoie $F = \langle e_{n+1} \rangle^\perp$ sur $F' = \langle e'_{n+1} \rangle^\perp$. On en déduit l'application $\widetilde{u}$ recherchée.

Supposons maintenant que $q|_F$ soit dégénérée (toujours avec q non dégénérée). Alors $F^\perp$ est une droite et est contenue dans F. Appelons e_n un vecteur directeur de cette droite, que nous complétons en une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de F avec $q(e_i) = a_i \neq 0$ pour $i \neq n$ (et $q(e_n) = 0$). Comme dans la démonstration du théorème de Witt (lemme VII.7.11), on peut trouver un vecteur e_{n+1} tel que la matrice de q dans la base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ soit

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & a_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $e'_i = u(e_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. En appliquant encore le lemme VII.7.11, on en déduit une base $(e'_1, \dots, e'_{n+1})$ de E dans laquelle la forme quadratique q/α a pour matrice celle écrite ci-dessus. Il ne reste plus qu'à poser $\widetilde{u}(e_i) = e'_i$ (pour tout i) pour avoir à la fois $q \circ \widetilde{u} = \alpha q$ et finit la démonstration dans ce cas.

Il reste à considérer le cas où la forme quadratique q est dégénérée. Appelons $N = E^{\perp}$ le noyau de q. Sa codimension r est le rang de q. Remarquons pour commencer que F contient N si et seulement si F' le contient. En effet, si F ne contient pas N, comme F est un hyperplan, il contient un supplémentaire de N et le rang de $q|_F$ est r, alors que, si F contient N, son rang est strictement plus petit. Donc l'hyperplan F contient N si et seulement si le rang de $q|_F$ est r... et il en est de même de son compère F', ce qui montre l'assertion.

Supposons donc que F et F' contiennent N. Ainsi F/N et F'/N sont des hyperplans de E/N, notre u définit une isométrie de F/N (munie de la restriction de la forme non dégénérée induite) sur F'/N (idem). On peut appliquer l'étude précédente et en déduire une isométrie $\overline{u}$ de E/N muni d'une βq sur E/N munie de q et envoyant F/N sur F'/N. Pour finir, on choisit une base $(e_1, \ldots, e_{n+1-r})$ de N, on la complète en une base $(e_1, \ldots, e_{n+1-r}, \ldots, e_n)$ de F et enfin en une base $(e_1, \ldots, e_{n+1-r}, \ldots, e_n, e_{n+1})$ de E, on choisit des vecteurs e'_i de F' et un vecteur e'_{n+1} tels que $\overline{u}$ envoie la classe modulo N de e_i sur e'_i (pour $n+2-r \leq i \leq n+1$) et on définit $\widetilde{u} : E \to E$ par

$$\widetilde{u}|_N = \mathrm{Id}_N \text{ et } \widetilde{u}(e_i) = e'_i \text{ pour } n+2-r \leq i \leq n+1,$$

qui a les propriétés voulues.

Il reste à considérer le cas où ni F ni F' ne contient N. Les deux hyperplans F et F' s'envoient surjectivement dans le quotient E/N. Soient $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une base de E telle que les n premiers vecteurs forment une base de F et les $n+1-r$ derniers une base de N. Choisissons r vecteurs $e'_1, \ldots, e'_r$ dans F' dont les classes modulo N sont celles de $e_1, \ldots, e_r$ respectivement, puis complétons par des vecteurs pris dans N en une base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de F' puis en une base $(e'_1, \ldots, e'_{n+1})$ de E. Il ne reste plus qu'à définir $\widetilde{u}$ par $\widetilde{u}(e_i) = e'_i$. Et c'est fini. $\square$

Exercices et problèmes

Formes quadratiques[18]

Exercice VII.1. Montrer que $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i \dfrac{\partial q}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ et que $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(d^2 q)_0(x, y)$.

[18] D'autres exercices sur les formes quadratiques figurent parmi les exercices « plus théoriques » regroupés à la fin de ce chapitre.

Exercice VII.2. Soit $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur l'espace vectoriel E de dimension n. Montrer que $Q(E)$ est un espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

Exercice VII.3. Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que, pour $n \geq 3$, la forme quadratique $q(x) = f(x)g(x)$ est dégénérée.

Exercice VII.4. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit φ une forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans cette base est A. Quelle est la matrice de $\widetilde{\varphi} : E \to E^\star$ si on munit $E^\star$ de la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$? Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si la matrice A est inversible.

***Exercice VII.5* (Diagonalisation des matrices symétriques réelles)**
Soit A une matrice carrée $n \times n$, symétrique réelle. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle elle est diagonalisable. Pour éviter les ambiguïtés, précisons qu'il s'agit bien ici de diagonaliser A comme la matrice d'un endomorphisme, c'est-à-dire de trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

***Exercice VII.6* (Une autre orthogonalisation simultanée).** Soient q et q' deux formes quadratiques sur un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que l'endomorphisme de E composé $\widetilde{\varphi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi'}$ a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q'.

Exercice VII.7. Montrer que le rang de la forme quadratique q est le rang de l'application linéaire $\widetilde{\varphi}$. Quels sont les rangs des formes quadratiques x_1^2, $x_1^2 - x_2^2$, $x_1^2 + x_2^2$, $2x_1x_2$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2$?

Exercice VII.8. Écrire les formes polaires, puis réduire sur $\mathbf{R}$ les formes quadratiques définies sur $\mathbf{R}^4$ par $x^2+y^2+2(z^2+t^2)+xz+zt+tx$, puis par $xy+yz+zx$.

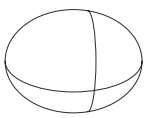
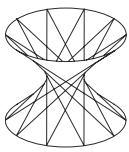
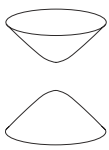
Coniques et quadriques affines et euclidiennes[19]

***Exercice VII.9* (Paraboloïde hyperbolique).** La quadrique de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z = xy$ a-t-elle un centre ? La dessiner et montrer qu'elle est réunion d'une famille de droites (c'est ce qu'on appelle une surface *réglée*, voir le chapitre IX).

Exercice VII.10. Construire dans $\mathbf{R}^3$ une quadrique affine avec une infinité de centres. Même question avec aucun centre.

[19] On trouvera d'autres exercices sur les coniques au chapitre VIII et beaucoup d'autres dans **[30]**.

***Exercice VII.11* (Quadriques de l'espace de dimension 3).** On suppose que la partie quadratique q d'une quadrique affine est une forme quadratique non dégénérée. Soit Ω le centre de la quadrique. Compléter le tableau suivant, en expliquant ce que les points représentent[20].

$q = 1$ et $\Omega \notin \mathcal{C}$				$\varnothing$
signature de q	$(3,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$
$\Omega \in \mathcal{C}$	.	.	.	.
signature de q	$(3,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$

Remplir les blancs dans le tableau suivant, pour compléter la classification des quadriques affines réelles d'un espace de dimension 3.

rang de q	Ω, centre	position de Ω
2	une droite D de Ω	$D \not\subset \mathcal{C}$
		$D \subset \mathcal{C}$
	pas de Ω	
1	un plan P de Ω	$P \not\subset \mathcal{C}$
		$P \subset \mathcal{C}$
	pas de Ω	

Exercice VII.12. Montrer que les quadriques réelles propres en dimension 3 sont homéomorphes à une sphère, à un cylindre, ou a la réunion disjointe de deux plans.

Exercice VII.13. Que donnerait la classification des coniques d'un plan affine *complexe* ?

Exercice VII.14. On se place dans un plan euclidien. Décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par

$$x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x+y) = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 1, \quad xy + \lambda(x+y) + 1 = 0,$$
$$y^2 = \lambda x^2 - 2x, \quad x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0.$$

[20] On peut voir les quadriques propres sur la figure 21.

Exercice VII.15. On donne une hyperbole. Écrire son équation dans un repère d'origine son centre et d'axes ses asymptotes.

Exercice VII.16. Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O, peut-on écrire l'équation d'une parabole sachant que

– son sommet est O, son axe l'axe des x et son paramètre 2 ?

– son foyer est $F = (4, 3)$, sa directrice $D : y = -1$? On déterminera aussi son sommet et son paramètre.

Exercice VII.17. Dans un plan affine réel, on donne une conique propre $\mathcal{C}$. Préciser quels sont les points du plan d'où l'on peut mener deux (resp. une, aucune) tangentes à $\mathcal{C}$.

Exercice VII.18. Que peut-on dire de l'image d'une ellipse par une application affine ? de celle d'un cercle ?

Exercice VII.19. On donne un cercle dans un plan de l'espace euclidien de dimension 3. On projette l'espace sur un de ses plans. Quelle est l'image du cercle ?

Exercice VII.20. Montrer que la droite qui joint le centre d'une ellipse au milieu d'une corde MM' passe par le point commun aux tangentes à l'ellipse en M et M'.

***Exercice VII.21* (Diamètres conjugués d'une ellipse).** Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère la forme quadratique

$$q(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

(avec $0 < b < a$). Si (u, v) est une base orthonormée pour q, on dit que u et v sont des *diamètres conjugués* de l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $q = 1$. On suppose que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont des diamètres conjugués de $\mathcal{C}$. On appelle P le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{C}$ en M et M'. Montrer que

– Le quadrilatère $OMPM'$ est un parallélogramme d'aire (constante) égale à ab (premier théorème d'Apollonius).

– La quantité $OM^2 + {OM'}^2$ est constante, égale à $a^2 + b^2$ (deuxième théorème d'Apollonius).

Exercice VII.22. Paramétrer une branche de l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

à l'aide de fonctions hyperboliques.

Exercice VII.23. Montrer qu'une parabole est contenue dans l'un des demi-plans déterminés par l'une quelconque de ses tangentes.

Exercice VII.24. On donne deux paraboles dans un plan affine euclidien. Montrer qu'elles sont (directement) semblables.

On donne deux coniques propres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans un plan affine euclidien. À quelle(s) condition(s) sont-elles semblables ?

Exercice VII.25. On donne une conique propre $\mathcal{C}$ d'un plan affine euclidien. Quel est le groupe des isométries qui préservent $\mathcal{C}$?

Exercice VII.26. Soit M un point d'une parabole $\mathcal{P}$ de sommet S. La normale[21] à $\mathcal{P}$ en M coupe l'axe en N, la tangente le coupe en T. On appelle m le projeté orthogonal de M sur l'axe.

Montrer que mN ne dépend pas de M. Quelle est sa valeur ?

Montrer que S est le milieu de mT. Quel est le milieu de NT ?

Exercice VII.27. Soit $\mathcal{P}$ une parabole. On considère deux cordes parallèles MN et $M'N'$. Montrer que la droite joignant leurs milieux est parallèle à l'axe de $\mathcal{P}$.

Exercice VII.28. Dans un plan euclidien, on donne une parabole définie, dans un certain repère orthonormé, par l'équation $y = x^2$. On demande de construire les axes $x = 0$ et $y = 0$ avec une règle et un compas (la règle du jeu est la même qu'au chapitre IV, les points de la parabole sont supposés construits).

Exercice VII.29. Montrer que toute conique propre peut se représenter dans un repère orthonormé par une équation

$$y^2 = 2px + qx^2$$

avec q réel et $p > 0$.

Exercice VII.30. Écrire l'équation d'une conique de foyer F dans des coordonnées polaires dont l'origine est en F.

Exercice VII.31. Dans un plan affine euclidien, on donne un point F, une droite D ne passant pas par F et un réel strictement positif e. Décrire l'ensemble

$$\{M \mid MF \leq ed(M, D)\}?$$

Exercice VII.32. Dans un plan affine euclidien, on donne deux points F et F'. Soit $a = \frac{1}{2}FF'$. Quel est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$? tels que $MF - MF' = 2a$?

[21] La droite perpendiculaire à la tangente et passant par M.

Exercice VII.33. Dans un plan affine euclidien, on donne deux points F et F' et un nombre réel positif a. Décrire les ensembles

$$\{M \mid MF + MF' \leq 2a\}, \qquad \{M \mid MF' - MF \leq 2a\}?$$

Exercice VII.34. On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre F et un point F' à l'intérieur de ce cercle. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{C}$ et passant par F' ? Même question avec F' extérieur à $\mathcal{C}$.

Exercice VII.35. Dans un plan affine euclidien, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un de ses diamètres AA'. À tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et de A', on associe le point M' obtenu de la façon suivante :

– On projette M sur la médiatrice de AA', obtenant un point K,
– M' est le point d'intersection des droites OM et AK (figure 28).

Montrer que M se trouve sur une parabole de foyer O et de directrice la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Étudier la réciproque.

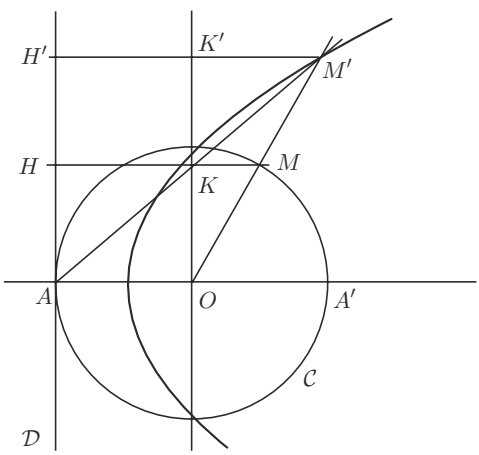


Figure 28

Exercice VII.36. Soit $\mathcal{C}$ une hyperbole d'excentricité e, F un de ses foyers et D la directrice correspondante. Soit Δ une droite parallèle à une asymptote de $\mathcal{C}$. Soient N un point de Δ et n sa projection sur D. Montrer que, quand N tend vers l'infini sur Δ, le rapport NF/Nn tend vers e.

Soit M un point de $\mathcal{C}$. La perpendiculaire à MF en F coupe D en P. Montrer que MP n'est pas parallèle à une asymptote[22] de $\mathcal{C}$.

[22] Ceci complète l'« autre » démonstration de VII.2.12.

***Exercice VII.37* (Mouvement des planètes).** Si l'on en croit les lois de Kepler, les planètes décrivent des trajectoires planes décrites en coordonnées polaires (ρ, θ) par une équation $\rho = f(\theta)$, où la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$\frac{1}{f} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{f}\right) = \text{ constante}$$

(la constante dépend des masses et de constantes universelles, elle n'est pas nulle). Déterminer la nature de ces trajectoires.

Exercice VII.38. On donne trois droites en position générale (elles ne sont pas concourantes et deux d'entre elles ne sont jamais parallèles) dans un plan affine euclidien. On suppose que $\mathcal{P}$ est une parabole tangente à ces trois droites. Montrer que les trois projections du foyer F de $\mathcal{P}$ sur les trois droites sont alignées sur la tangente au sommet. En déduire que F est sur le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois droites. Que peut-on dire de la tangente au sommet ? de la directrice ? Quel est le lieu des foyers des paraboles tangentes aux trois droites (on traitera avec soin le cas des sommets du triangle) ?

Exercice VII.39. On donne quatre droites en position générale dans un plan affine euclidien. Montrer qu'il existe une et une seule parabole tangente à ces quatre droites.

***Exercice VII.40* (Sections coniques).** Étudier l'intersection d'un plan affine avec le cône de révolution d'équation $x^2+y^2 = z^2$ (c'est ainsi qu'Apollonius définissait les coniques, et c'est ce qui explique leur nom.). Combien y a-t-il de sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan ? Comment s'interprètent les points de contact de ces sphères avec le plan (une histoire belge) ?

Exercices sur les coniques et quadriques projectives

Exercice VII.41. Les quadriques projectives d'un espace projectif forment un espace projectif. Les quadriques affines d'un espace affine forment-elles un espace affine ? projectif ?

Exercice VII.42. Soit ABC un triangle dont les trois côtés BC, CA et AB sont tangents à une conique non dégénérée en trois points (respectivement) U, V et W. Montrer que AU, BV et CW sont concourantes et que, si $A' = VW \cap BC$, $B' = WU \cap CA$ et $C' = UV \cap AB$, alors A', B' et C' sont alignés.

Exercice VII.43. Soit D une droite d'un espace affine, qui rencontre une quadrique en un point (unique et) simple. Montrer que, dans la complétion projective, elle rencontre la quadrique aussi à l'infini. Dans un plan affine, vérifier que ces sécantes

sont les parallèles aux asymptotes si la conique est une hyperbole et les parallèles à l'axe si c'est une parabole.

Exercice VII.44. Montrer que l'intersection d'une quadrique affine $\mathcal{C}$ avec l'hyperplan à l'infini est une quadrique dont la partie quadratique d'une équation de $\mathcal{C}$ est une équation. Réinterpréter l'équation des asymptotes d'une hyperbole.

***Exercice VII.45* (Nullstellensatz).** On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que l'application qui, à une quadrique projective associe son image, est injective[23] (de $PQ(E)$ dans l'ensemble des parties de $P(E)$). On pourra traiter d'abord le cas où $P(E)$ est une droite et utiliser l'intersection de la quadrique avec les droites dans le cas général. Que se passe-t-il quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$?

Exercice VII.46. Montrer qu'une quadrique propre et non vide d'un espace projectif réel de dimension 3 est homéomorphe à une sphère S^2 de dimension 2 ou au produit cartésien $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ de deux cercles.

***Exercice VII.47* (Droites contenues dans une quadrique).** Soit $\mathcal{C}$ une quadrique propre d'un espace projectif complexe de dimension 3. Montrer que la quadrique $\mathcal{C}$ est la réunion d'une famille de droites (et même de deux). Que peut-on dire des quadriques réelles ? Montrer que $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Montrer que toute quadrique complexe (affine ou projective) contient des droites (affines ou projectives !).

Exercice VII.48. On donne trois droites de l'espace de dimension 3. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient.

***Exercice VII.49* (Faisceaux de coniques).** On considère les faisceaux de coniques définis par les sept paires de coniques de la figure 16. Parmi ces dessins, deux paires définissent (respectivement) le même faisceau. Lesquelles ? Pour chacun des cinq faisceaux différents restants, dessiner (au moins une) conique propre et *toutes* les coniques dégénérées (voir aussi les exercices VII.57, VII.58 et VII.59).

***Exercice VII.50* (Équations du quatrième degré).** On veut montrer et expliquer que résoudre l'équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

revient à résoudre une équation de degré 3 et quelques équations de degré 2, ce qui permet de résoudre les équations de degré 4 par radicaux si on sait le faire pour

[23] C'est un cas particulier d'un théorème de Hilbert, le *théorème des zéros*, en allemand *Nullstellensatz*, qui affirme une propriété analogue pour des équations plus générales. Voir par exemple [**38**].

celles de degré 3 (du point de vue de la théorie de Galois, la chose importante est l'homomorphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$, dont le noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ et que nous avons mis en évidence dans les exercices V.33 et VI.27). Poser $y = x^2$ et constater que les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de deux coniques planes. Penser au faisceau engendré par ces deux coniques et conclure.

Exercice VII.51. Soit $\mathcal{C}$ une conique dégénérée formée de deux droites sécantes du plan. Soit m un point du plan. Que peut-on dire de l'orthogonal de m par rapport à la conique $\mathcal{C}$?

Exercice VII.52. Soit $\mathcal{C}$ la conique réunion des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Que dit le théorème de Pascal si on choisit a, c et e sur $\mathcal{D}$, b, d et f sur $\mathcal{D}'$?

***Exercice VII.53* (Théorème de Lamé).** Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques et soit A un point du plan. Montrer que les polaires de A par rapport aux coniques de $\mathcal{F}$ sont concourantes.

Exercice VII.54. Soient $\mathcal{C}$ une conique[24] d'un plan affine et D_1, D_2, D_3 trois directions de droites. Soit M_0 un point de $\mathcal{C}$, M_1 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_1 passant par M_0 et de $\mathcal{C}$, M_2 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_2 passant par M_1 et de $\mathcal{C}$, *etc.* On définit ainsi des points M_i pour tout $i \geq 0$. Montrer que $M_6 = M_0$.

Exercice VII.55. On donne cinq points a, b, c, d et e du plan. On suppose qu'il existe une unique conique propre $\mathcal{C}$ passant par ces cinq points. Construire (avec la règle seule) un point arbitraire f de $\mathcal{C}$ et la tangente à $\mathcal{C}$ en f.

Exercice VII.56. On donne quatre points A, B, C et D du plan P dont trois quelconques ne sont jamais alignés. Montrer que tout point M du plan distinct de A, B C et D est sur une unique conique du faisceau à points bases A, B, C et D. On donne un scalaire ρ. Décrire l'ensemble

$$\{M \in P \mid [MA, MB, MC, MD] = \rho\}.$$

Exercice VII.57. Dans un faisceau de cercles, il y a une droite, l'axe radical. Dans un faisceau de coniques, il n'y a que des coniques. Est-ce une contradiction ?

Exercice VII.58. Qu'est, dans un plan affine euclidien, un faisceau de coniques bitangentes (comme sur l'avant dernier dernier dessin de la figure 16) dont les points bases sont les points cycliques ?

[24] Le cas où $\mathcal{C}$ est un cercle d'un plan euclidien a été proposé au chapitre III (exercice III.28).

Exercice VII.59. Dessiner (au moins un) faisceau de coniques *réelles* qui n'apparaît pas dans la liste dressée sur la figure 16 et dans l'exercice VII.49. Au fait... retrouver la classification des faisceaux de cercles du § III.4 (voir aussi l'exercice VII.57).

Exercice VII.60. Soit $\mathcal{C}$ une conique d'un plan affine euclidien. Que peut-on dire de $\mathcal{C}$ sachant que les points cycliques I et J sont conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire sachant que la droite IJ coupe $\mathcal{C}$ en A et B avec $[I, J, A, B] = -1$) ?

Exercice VII.61. Deux triangles ABC et DEF ont leurs côtés tangents à une conique $\mathcal{C}$. Montrer que les six points A, B, C, D, E et F sont sur une même conique $\mathcal{C}'$.

Exercice VII.62. Démontrez toutes les affirmations sur les cercles, faisceaux et inversions faites au § VII.6 et dont vous estimez qu'elles y sont insuffisamment démontrées.

Exercice VII.63. Étudier, dans les termes du § VII.6, les différentes possibilités d'image d'un faisceau par une inversion répertoriées au § III.4.

Exercice VII.64 **(« Invariant anallagmatique » de deux cercles, bis)**
Soient C et C' deux cercles du plan $\mathcal{P}$, de rayons R et R' respectivement. Le faisceau $\mathcal{F}$ qu'ils définissent contient deux cercles-points Γ et Γ', les deux points d'intersection de $\mathcal{F}$ avec la quadrique $\widehat{\mathcal{P}}$ (éventuellement imaginaires, éventuellement confondus). Évaluer le birapport des quatre points $[C, C', \Gamma, \Gamma']$ de la droite $\mathcal{F}$ en fonction de R, R' et de la distance d des centres de C et C'. En déduire que le rapport

$$\frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'}$$

est invariant par inversion (voir aussi l'exercice III.60).

Exercices un peu plus théoriques

Exercice VII.65. On considère le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Montrer que sur un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbf{Q}$, il y a une infinité de formes quadratiques non équivalentes.

Exercice VII.66 **(Discriminant).** Soit q une forme quadratique non dégénérée sur un espace de dimension finie sur un corps $\mathbf{K}$. Montrer que le déterminant de la matrice de q dans une base définit un élément $\delta(q) \in \mathbf{K}^\star/(\mathbf{K}^\star)^2$ qui est un invariant du type d'isomorphisme de q.

***Exercice VII.67* (Sur $\mathbf{F}_q$).** Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2. Combien de carrés y a-t-il dans $\mathbf{F}_q$? En déduire que, pour tous a, $b \in \mathbf{F}_q^\star$, il existe deux éléments x, y de $\mathbf{F}_q$ tels que

$$ax^2 + by^2 = 1.$$

Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{F}_q$. Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit $a \in \mathbf{F}_q^\star$ un élément qui n'est *pas* le carré d'un élément de $\mathbf{F}_q^\star$. Montrer que Q est équivalente, soit à

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2$$

soit à

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + ax_n^2$$

(les deux possibilités étant exclusives l'une de l'autre). Étant donnée une forme quadratique, comment décider auquel de ces deux types elle appartient ?

***Exercice VII.68* (Racine carrée d'une matrice symétrique définie positive)**

Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose que la forme bilinéaire associée, c'est-à-dire la forme φ définie par

$$\varphi(x, y) = {}^t xAy$$

est définie positive.

(1) Montrer que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A sont des nombres réels strictement positifs.

(2) Soit P un polynôme tel que

$$P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que $S = P(A)$ est une matrice symétrique définie positive et qu'elle satisfait à $S^2 = A$.

***Exercice VII.69* (Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n; \mathbf{R})$).** Montrer que toute matrice réelle inversible M s'écrit comme un produit

$$M = \Omega S$$

où $\Omega \in \mathrm{O}(n)$ est une matrice orthogonale et S est une matrice symétrique définie positive. Montrer que cette décomposition est unique.

***Exercice VII.70* (Décomposition « de Cartan »).** Montrer que toute matrice réelle inversible s'écrit comme un produit

$$M = \Omega_1 D \Omega_2$$

où D est une matrice diagonale à valeurs propres strictement positives et Ω_1, Ω_2 sont des matrices orthogonales.

Exercice VII.71. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F n'est pas constitué de vecteurs isotropes pour Q. Définir l'intersection de la quadrique projective définie par Q et de $P(F)$. Que se passe-t-il quand tous les vecteurs de F sont isotropes ?

Soit D une droite projective. Que peut-on dire de l'intersection de D avec la quadrique définie par Q ?

Exercice VII.72. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

et son groupe d'isométries O_q, c'est-à-dire le groupe

$$\mathrm{O}_q = \{f \in \mathrm{GL}(3; \mathbf{R}) \mid q \circ f = q\}.$$

Déterminer les orbites de son action sur $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ (comme sous-groupe de $\mathrm{GL}(3; \mathbf{R})$).

***Exercice VII.73* (Quadriques et dualité projective).** Si $\mathcal{C}$ est une courbe d'un plan projectif $P(E)$ on définit $\widetilde{\mathcal{C}} \subset E$ par

$$v \in \widetilde{\mathcal{C}} \text{ si et seulement si } p(v) \in \mathcal{C}.$$

(1) Vérifier que $\widetilde{\mathcal{C}}$ est un *cône*[25]. On dit que la droite projective d de $P(E)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en m si $d = P(F)$ pour un plan vectoriel F de E tangent[26] à $\widetilde{\mathcal{C}}$ le long de la droite vectorielle m de E.

Vérifier que, si $\mathcal{C}$ est une conique, la tangente en m à $\mathcal{C}$ définie ainsi coïncide avec celle définie au § VII.3.

(2) L'ensemble des droites projectives tangentes à $\mathcal{C}$ forme une courbe $\mathcal{C}^\star$ de $P(E^\star)$. Montrer que si $\mathcal{C}$ est une conique propre, $\mathcal{C}^\star$ est aussi une conique[27].

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une quadrique d'un espace projectif $P(E)$ de dimension n, montrer que la famille des hyperplans projectifs tangents à $\mathcal{C}$ est une quadrique de l'espace projectif $P(E^\star)$ (voir au besoin l'exercice VI.2).

(3) On revient au cas du plan. Comment les propriétés d'intersection de $\mathcal{C}^\star$ avec les droites de $P(E^\star)$ se traduisent-elles dans $P(E)$? Démontrer le théorème de Brianchon : si un hexagone a tous ses côtés tangents à une conique propre, alors ses diagonales sont concourantes (figure 29).

[25] C'est-à-dire que, si $\widetilde{\mathcal{C}}$ contient v, il contient toute la droite engendrée par v.

[26] Voir au besoin le chapitre IX, au moins dans le cas réel.

[27] La figure 1 du chapitre VIII représente la courbe $\mathcal{C}^\star$ quand $\mathcal{C}$ est une ellipse.

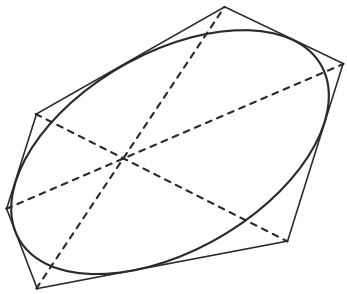


Figure 29

(4) On donne cinq droites générales d'un plan projectif. Combien existe-t-il de coniques tangentes à ces cinq droites ? On donne quatre droites générales d'un plan affine. Combien y a-t-il de paraboles tangentes à ces quatre droites (voir aussi l'exercice VII.39) ?

***Exercice VII.74* (Familles homofocales).** On se place dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on donne deux nombres réels α et β (on suppose que $0 < \alpha < \beta$) et on considère la conique $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} = 1.$$

Dessiner sur la même figure la conique $\mathcal{C}_\lambda$ pour $\lambda < \alpha$, pour $\alpha < \lambda < \beta$ et pour $\beta < \lambda$. Montrer que toutes les $\mathcal{C}_\lambda$ ont les mêmes foyers. Les coniques $\mathcal{C}_\lambda$ sont dites *homofocales*.

On complète le plan en un plan projectif et on considère la famille des coniques duales des $\mathcal{C}_\lambda$ (comme dans l'exercice VII.73). Montrer que c'est un faisceau (linéaire) de coniques.

Plus généralement, on considère dans un espace affine euclidien de dimension n les quadriques $\mathcal{C}_\lambda$ d'équations

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1 - \lambda} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n - \lambda} = 1,$$

où les α_i sont des nombres réels fixés tels que $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. Vérifier que la famille duale est un faisceau de quadriques. Par analogie avec le cas des coniques, on dit que cette famille est *homofocale*.

Montrer qu'un point général de l'espace est contenu dans exactement n quadriques de la famille et que celles-ci sont orthogonales (c'est un théorème de Jacobi).

Montrer qu'une droite générale est tangente à $n-1$ quadriques de la famille et que les hyperplans tangents à ces quadriques en les points de tangence sont orthogonaux (c'est un théorème de Chasles).

***Exercice VII.75* (Coniques réelles).** On a vu que le complémentaire d'une droite dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ est connexe. Que peut-on dire du complémentaire d'une conique dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$?

***Exercice VII.76* (Cubiques réelles).** On considère, dans $\mathbf{R}^2$, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré 3 dont on suppose qu'il n'a pas de racine multiple. Dessiner $\mathcal{C}$. Combien a-t-elle de composantes connexes ? Montrer qu'une des composantes est non bornée et homéomorphe à une droite et que, s'il en existe une deuxième, celle-ci est homéomorphe à un cercle.

On considère maintenant la courbe $\widehat{\mathcal{C}}$ d'équation homogène $y^2 z = \widehat{P}(x,z)$ (où $\widehat{P}$ est le polynôme homogène de degré 3 en deux variables obtenu en homogénéisant le polynôme P). Montrer que $\widehat{\mathcal{C}}$ s'obtient en ajoutant un point à $\mathcal{C}$. Combien $\widehat{\mathcal{C}}$ a-t-elle de composantes connexes ? À quoi sont-elles homéomorphes ?

Montrer que le complémentaire dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ de la composante de $\widehat{\mathcal{C}}$ qui contient le point à l'infini est connexe. Si $\mathcal{C}$ a une deuxième composante connexe, que peut-on dire du complémentaire de cette composante dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$?

***Exercice VII.77*.** Une forme bilinéaire φ est *alternée* si elle vérifie

$$\varphi(x,x) = 0 \text{ pour tout } x.$$

Vérifier que cette propriété est équivalente à l'antisymétrie de φ, c'est-à-dire au fait que

$$\varphi(x,y) = 0 \text{ pour tous } x \text{ et } y$$

(on suppose que le corps de base n'est pas de caractéristique 2).

Soit φ une forme bilinéaire alternée *non dégénérée*. Montrer qu'il existe une base

$$(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$$

de E telle que l'on ait, pour tous i et j,

$$\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j} \qquad \varphi(e_i, e_j) = \varphi(f_i, f_j) = 0.$$

Que peut-on dire de la dimension de E ? Soit F un sous-espace vectoriel isotrope[28] de E. Que peut-on dire de la dimension de F ?

Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que le rang de A est un nombre pair.

[28] C'est-à-dire tel que $\varphi(x,y) = 0$ pour tous x et y de F.

***Exercice VII.78* (D'où la photo a-t-elle été prise ?).** Pour cet exercice, on regarde une photographie d'une ville V (par exemple une carte postale). On dispose aussi d'un plan de V et l'on souhaite déterminer d'où la photo a été prise. On repère cinq bâtiments (ou autres[29], antennes, cheminées, minarets...) sur la photographie que l'on est capable de situer sur le plan, où ce sont des points A, B, C, D et E. Sur la photographie, ces points sont devenus les points a, b, c, d et e. Sur la figure 30, le point P est l'objectif de l'appareil photographique, la droite en pointillés représente le dispositif photosensible au fond de l'appareil.

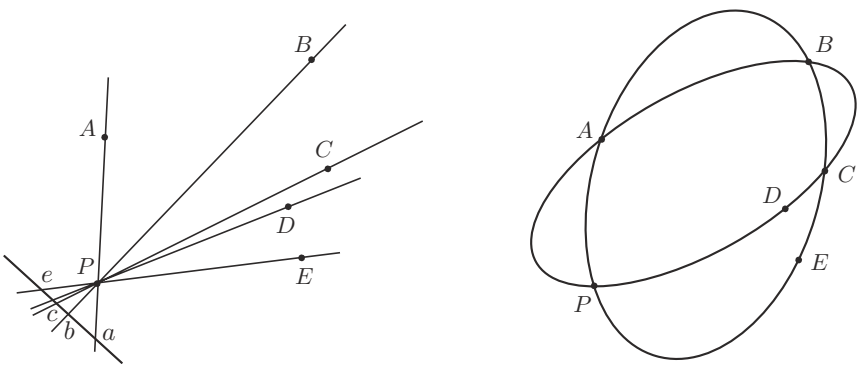


Figure 30

(1) Sur la photographie, on mesure les distances entre les points et on calcule les birapports $\rho_1 = [a, b, c, d]$ et $\rho_2 = [a, b, c, e]$. Si P est la position (de l'objectif) du photographe, montrer que l'on a

$$[PA, PB, PC, PD] = \rho_1 \text{ et } [PA, PB, PC, PE] = \rho_2.$$

(2) En utilisant le résultat de l'exercice VII.56, montrer que l'on peut théoriquement déterminer P comme le quatrième point d'intersection de deux coniques passant par A, B et C.

(3) En pratique, on essaie donc de dessiner les deux coniques sur le plan pour déterminer P. Celui-ci est obtenu à partir d'une équation de degré 4... dont on connaît déjà trois solutions. Voyez-vous un moyen pratique de déterminer effectivement la position de P ?

[29] Dans **[54]**, au premier chapitre duquel le titre de cet exercice est emprunté, il y a des piles de ponts parmi les points en question.

VIII

COURBES, ENVELOPPES ET DÉVELOPPÉES

Les courbes apparaissent dans des problèmes mathématiques divers et de façons assez variées. Voici une liste d'exemples (dans un espace affine réel).

– En cinématique, notamment comme intégrales de champs de vecteurs, en d'autres termes comme solutions d'équations différentielles.

– Une variante : l'enveloppe d'une famille de droites, voire d'une famille d'autres courbes.

– On les voit aussi, dans l'espace, à l'intersection de deux surfaces, par exemple d'une surface et d'un plan. D'où leur intérêt pour l'étude des surfaces (voir le chapitre IX).

– Encore des courbes, les solutions d'une équation algébrique $P(x, y) = 0$ (dans le plan, les coniques par exemple), ou de plusieurs

$$P_1(x, y, z) = P_2(x, y, z) = 0$$

dans l'espace[1] de dimension 3, *etc.*

Elles sont décrites de façons assez différentes dans ces exemples, soit comme courbes paramétrées, c'est-à-dire images d'applications $t \mapsto f(t)$ définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$, soit par des équations cartésiennes.

Il est important de savoir passer d'un mode de représentation à un autre. Par exemple, étant donnée une courbe d'équation $P(x, y) = 0$ dans le plan, peut-on la paramétrer ? comment ? peut-on en trouver un paramétrage de la forme $(t, g(t))$? Les réponses à ces questions se trouvent dans le théorème des fonctions implicites. Je ne vais pas les traiter dans ce chapitre, puisque je ferai une étude analogue pour les surfaces au chapitre IX.

[1] C'est aussi une intersection de surfaces dans ce cas.

Il y a quand même des cas particuliers où il faut savoir passer d'une équation cartésienne à un paramétrage sans hésiter. Par exemple, une droite coupe une conique en deux points, et on en déduit un paramétrage de la conique par la famille des droites passant par un de ses points. On peut utiliser le même « truc » géométrique dans des situations légèrement différentes (voir les exercices VIII.1 et VIII.2).

Local/global

Il y a des propriétés locales : points singuliers, position par rapport à la tangente, *etc.*, mais il y a aussi des propriétés globales, comme par exemple le théorème de Jordan qui dit qu'une courbe fermée simple partage le plan en deux parties dont une seule est bornée. Dans ce livre, on se limitera aux propriétés locales, les propriétés globales étant plus difficiles à établir[(2)]. Pour l'étude locale, le cas paramétré est suffisant.

Affine/métrique

Même en restant au niveau local, il y a des propriétés affines, la position par rapport à la tangente notamment, et des propriétés métriques, celles qui font intervenir la longueur et la courbure d'une courbe. On abordera les deux types de propriétés ici.

Les plus beaux théorèmes sont à la fois globaux et métriques[(3)], ce sont le théorème des quatre sommets, l'inégalité isopérimétrique, qui affirme que, parmi toutes les courbes planes de longueur donnée, celle qui entoure la plus grande aire est le cercle, *etc.* Les lectrices alléchées peuvent consulter **[6]**.

Dans ce chapitre, je vais m'intéresser d'abord à des problèmes d'enveloppes. Je ferai ensuite quelques rappels sur la courbure des courbes planes pour revenir aux enveloppes dans le cadre des développées. Le chapitre se conclut par un appendice regroupant quelques rappels de définitions sur les courbes.

---

(2) Le théorème de Jordan est un exemple de théorème facile à énoncer et conforme à l'intuition, mais pas si facile à démontrer.

(3) On remarquera que tous les exemples de théorèmes globaux donnés ici sont des théorèmes sur les courbes *planes*. Les propriétés globales des courbes fermées simples de l'espace sont passionnantes et font l'objet d'une théorie mathématique difficile et vivante, la théorie des nœuds.

VIII.1. Enveloppe d'une famille de droites dans le plan

Nous avons déjà rencontré des familles de droites dans ce texte. Par exemple, les droites de Simson d'un triangle (exercice III.32) : il y en a une pour chaque point du cercle circonscrit. Un autre exemple est celui de la famille de toutes les tangentes à une courbe : il y en a une pour chaque point de la courbe.

Le problème des enveloppes est justement, étant donnée une famille de droites du plan, de savoir s'il existe une courbe, *l'enveloppe*, dont elle soit la famille des tangentes.

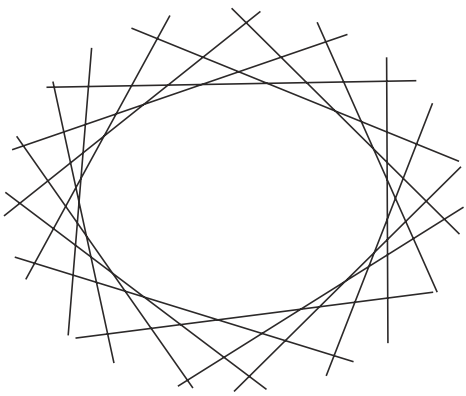


Figure 1

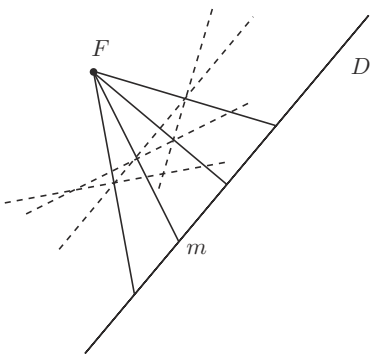


Figure 2

Ce n'est pas du tout une question artificielle : tous les lecteurs ont déjà rencontré des enveloppes — peut-être sans le savoir. La courbe lumineuse que le Soleil révèle dans leur tasse de café[(4)] en est une, l'arc-en-ciel est une autre manifestation de l'existence d'enveloppes[(5)].

Imaginons les droites de la famille dessinées comme sur la figure 1. Bien que l'enveloppe n'ait pas été dessinée sur cette figure, on l'y voit quand même : il y a concentration de l'encre précisément sur l'enveloppe. Un autre exemple est donné par la figure 38 du livre de Dürer [**18**]. Celui-ci explique à son lecteur comment construire une courbe « utile[(6)] »... en dessinant une famille de droites (une figure que l'on trouvera ici dans l'exercice VIII.7) et explique même comment fabriquer un instrument en bois permettant de dessiner les droites de cette famille.

(4) La nature du liquide a peu d'importance, au moins du point de vue mathématique.
(5) Voir les exercices VIII.13, VIII.14, VIII.15.
(6) Qui est une parabole.

Les phénomènes d'optique regroupés sous le nom de *caustiques* sont exactement de même nature : il y a concentration de la lumière et donc de la chaleur (le mot caustique veut dire « qui brûle ») le long de l'enveloppe.

La parabole comme enveloppe

À titre d'introduction, commençons par un exemple très simple, fourni par les propriétés tangentielles des coniques étudiées au § VII.2. Soit D une droite d'un plan affine euclidien et soit F un point hors de D. Quelle est l'enveloppe de la famille des médiatrices des segments Fm quand m parcourt D (figure 2) ? Il est bien clair que la parabole de foyer F et de directrice D est la solution (voir le corollaire VII.2.15). On rencontrera plusieurs exemples de cette situation dans les exercices.

Enveloppe d'une famille paramétrée

Le plan affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère. On considère une famille de droites dépendant d'un paramètre $t \in I$ variant dans un intervalle I de $\mathbf{R}$. La droite $\mathcal{D}_t$ a pour équation

$$u(t)x + v(t)y + w(t) = 0.$$

On suppose que u, v et w sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et que u et v ne s'annulent pas en même temps (ainsi on a bien l'équation d'une droite, pour tout t).

Le problème de l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ se formule ainsi : trouver une courbe paramétrée $f : I \to \mathcal{E}$ telle que

– d'une part, la droite $\mathcal{D}_t$ passe par le point $f(t)$: $f(t) \in \mathcal{D}_t$ pour tout t dans I,

– et d'autre part, elle soit tangente à la courbe en $f(t)$: le vecteur $f'(t)$ dirige la droite $\mathcal{D}_t$ pour tout t dans I.

Comme nous avons décrit les droites par des équations dans un repère, cherchons $f(t)$ *via* ses coordonnées ($f(t) = (x(t), y(t))$). Les deux conditions ci-dessus se traduisent en le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t)x(t) + v(t)y(t) + w(t) & = & 0 \\ u(t)x'(t) + v(t)y'(t) & = & 0. \end{array}\right.$$

Dérivons la première équation par rapport à t et reportons-y la deuxième. On voit que ce système est équivalent au suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t)x(t) + v(t)y(t) + w(t) & = & 0 \\ u'(t)x(t) + v'(t)y(t) + w'(t) & = & 0. \end{array}\right.$$

Celui-ci n'est rien d'autre qu'un système[7] *linéaire* en $x(t)$ et $y(t)$. Il a une unique solution $(x(t_0), y(t_0))$ exactement quand le déterminant n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} u(t_0) & u'(t_0) \\ v(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le système a des solutions $(x(t), y(t))$ pour tout t dans un voisinage $I_0 \subset I$ d'un tel point t_0 (pourquoi ?), ce qui définit une courbe paramétrée qui est solution de notre problème, l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in I_0}$.

Droites parallèles, droites concourantes

Il est clair *a priori* qu'une famille de droites parallèles ne peut avoir d'enveloppe, et de même que l'enveloppe d'une famille de droites concourantes est la courbe « constante » qui est leur point commun. Vérifions-le sur nos équations.

– Dire que les droites $\mathcal{D}_t$ sont toutes parallèles, c'est dire que $u(t)$, $v(t)$ sont proportionnelles à des constantes u et v, $u(t) = \lambda(t)u$ et $v(t) = \lambda(t)v$. Alors

$$u'(t) = \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} u(t), \qquad v'(t) = \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} v(t)$$

et le déterminant du système est identiquement nul. Celui-ci n'a de solution que si $w(t)$ est un multiple de w ($w(t) = \lambda(t)w$), c'est-à-dire si toutes les droites de la famille sont confondues : $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_{t_0}$ et alors la droite $\mathcal{D}_{t_0}$ est elle-même l'enveloppe.

– Dire qu'elles sont concourantes, c'est dire que l'on peut écrire pour $\mathcal{D}_t$ une équation de la forme

$$u(t)(x - x_0) + v(t)(y - y_0) = 0,$$

autrement dit qu'on a $w(t) = -x_0 u(t) - y_0 v(t)$. Le système linéaire s'écrit

$$\begin{cases} u(t)(x(t) - x_0) + v(t)(y(t) - y_0) & = & 0 \\ u'(t)(x(t) - x_0) + v'(t)(y(t) - y_0) & = & 0, \end{cases}$$

ce qui fait qu'il a la solution constante $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ et que c'est la seule quand le déterminant n'est pas nul.

Exemples VIII.1.1

(1) Soit $\mathcal{D}_t$ la droite d'équation

$$3tx - 2y - t^3 = 0.$$

[7] On trouvera une autre interprétation de ce système dans l'exercice IX.14.

Pour trouver l'enveloppe de la famille des droites $\mathcal{D}_t$, on résout le système

$$\begin{cases} 3tx - 2y - t^3 = 0 \\ 3x - 3t^2 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

de la cubique cuspidale (voir au besoin le § VIII.4)[8]. On remarquera qu'il y a des solutions pour tout t, mais que ça n'empêche pas l'enveloppe d'avoir un point singulier.

(2) Prenons maintenant la famille des droites $\mathcal{D}_t$ d'équation

$$3t^2x - y - 2t^3 = 0,$$

qui donne le système

$$\begin{cases} 3t^2x - y - 2t^3 = 0 \\ 6tx - 6t^2 = 0. \end{cases}$$

Ce système n'a une solution unique que si $t \neq 0$, auquel cas la solution est

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3. \end{cases}$$

Il s'agit de la partie $x \neq 0$ du graphe de de la fonction $f(x) = x^3$. Remarquons toutefois que la tangente à ce graphe au point correspondant à $t = 0$ est bien la droite $\mathcal{D}_0$ (ici l'axe des x).

Courbes cycloïdales

Il s'agit d'une très belle famille d'exemples dont certains interviennent de façon naturelle dans de nombreux problèmes de géométrie. Le plan est maintenant euclidien orienté (et identifié à $\mathbf{C}$). On y fixe un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Deux points M_1 et M_2 parcourent le cercle avec des vitesses angulaires constantes ω_1 et ω_2 (figure 3). On cherche l'enveloppe de la famille des droites M_1M_2.

On suppose que $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$. Soit G le barycentre de $((M_1, \omega_2), (M_2, \omega_1))$:

$$(\omega_1 + \omega_2)\overrightarrow{OG} = \omega_2\overrightarrow{OM_1} + \omega_1\overrightarrow{OM_2} = \omega_2 Re^{i\omega_1 t} + \omega_1 Re^{i\omega_2 t}.$$

En dérivant cette relation par rapport à t, on trouve

$$(\omega_1 + \omega_2)\overrightarrow{V_G} = \omega_2\overrightarrow{V_{M_1}} + \omega_1\overrightarrow{V_{M_2}}$$

[8] Cet exemple est très artificiel : la droite $\mathcal{D}_t$ a été construite précisément comme tangente à la cubique cuspidale.

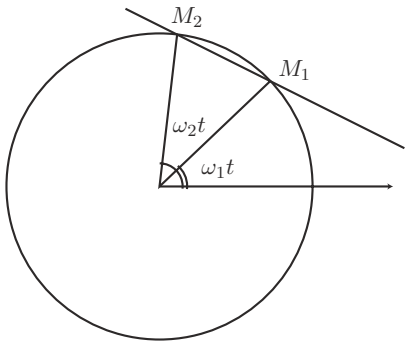


Figure 3

où $\overrightarrow{V_M}$ désigne la vitesse du point M. Par exemple, ici

$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega_1 t) \\ R\sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{V_{M_1}} = \omega_1 \begin{pmatrix} -R\sin(\omega_1 t) \\ R\cos(\omega_1 t) \end{pmatrix},$$

de sorte que les vecteurs $\omega_2 \overrightarrow{V_{M_1}}$ et $\omega_1 \overrightarrow{V_{M_2}}$ se correspondent dans la rotation de centre O qui envoie M_1 sur M_2 et que $\overrightarrow{V_G}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires. Quand t varie, le point G décrit donc une courbe dont la tangente est parallèle à la droite M_1M_2 et bien sûr, il est lui-même sur cette droite, comme barycentre de M_1 et M_2. Cette courbe est donc l'enveloppe recherchée.

Posons $\theta = \omega_1 t$ et $m = \omega_2/\omega_1$, on a alors l'égalité

$$\overrightarrow{OG} = \frac{R}{m+1}\left(me^{i\theta} + e^{im\theta}\right),$$

ce qui est une représentation en coordonnées polaires de l'enveloppe.

Remarques VIII.1.2

– Dans le cas où $\omega_1 + \omega_2 = 0$ (ou $m = -1$), il s'agit d'une famille de droites parallèles : il n'y a donc pas d'enveloppe.

– Le paramètre θ est proportionnel à t, c'est une mesure de l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ avec l'axe des x. Le nombre m est positif si les deux points tournent dans le même sens, négatif sinon. Le cas où $m = 1$ correspond à $M_1 = M_2$, auquel cas la droite M_1M_2 est la tangente au cercle. On trouve d'ailleurs bien $\overrightarrow{OG} = Re^{i\theta}$ dans ce cas (l'enveloppe est le cercle $\mathcal{C}$). On suppose donc désormais que $m \neq \pm 1$.

– Les points singuliers de l'enveloppe sont ceux où la dérivée

$$\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{OG} = \frac{iRm}{m+1}\left(e^{i\theta} + e^{im\theta}\right)$$

s'annule. On trouve $\theta = (2k+1)\pi/(m-1)$ pour un certain entier k. Par exemple, si $m \in \mathbf{Z}$, il y a $|m-1|$ points (la condition pour qu'il y en ait un nombre fini est que m soit rationnel).

– Le changement de variables $\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{m-1}$ donne

$$me^{i\theta} + e^{im\theta} = \exp\left(i\frac{\pi}{m-1}\right)\left(me^{i\varphi} - e^{mi\varphi}\right).$$

On décrit souvent les courbes cycloïdales par une équation de cette forme (là, il y a un point de rebroussement pour $\varphi = 0$).

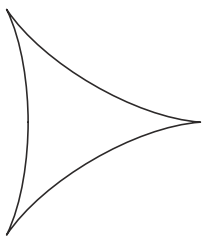


Figure 4. Hypocycloïde à trois rebroussements

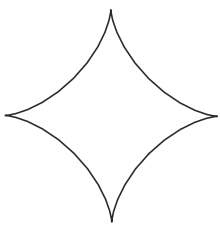


Figure 5. Astroïde

Voici maintenant une liste d'exemples obtenus pour de petites valeurs entières de m. L'enveloppe est située à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ quand $m > 0$ — on dit alors que c'est une *épicycloïde* — et à l'extérieur (au sens large) sinon — c'est alors une *hypocycloïde*.

– L'hypocycloïde à trois rebroussements est obtenue pour $m = -2$. La droite M_1M_2 est tangente au cercle $\mathcal{C}$ trois fois, en des points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, son enveloppe est tangente au cercle en ces mêmes points !

– L'hypocycloïde à quatre rebroussements est obtenue pour $m = -3$, elle est quadritangente au cercle $\mathcal{C}$. En contemplant la figure 5 on comprendra sans mal pourquoi cette courbe s'appelle aussi *astroïde*.

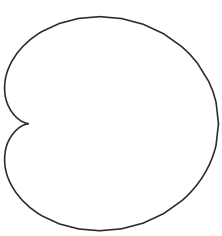


Figure 6. Cardioïde

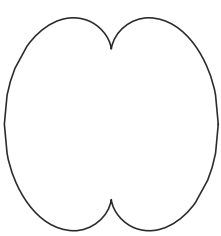


Figure 7. Néphroïde

– Il n'y a pas d'hypocycloïde à un ou deux rebroussements (pourquoi ?) mais il y a des épicycloïdes à un rebroussement, obtenues pour $m = 2$. Ce sont les *cardioïdes* (figure 6), courbes en forme de cœur.

– Les épicycloïdes à deux rebroussements sont les *néphroïdes* (figure 7), courbes en forme de rein.

VIII.2. Courbure d'une courbe plane

Dans ce paragraphe, on considère des courbes d'un espace affine euclidien, et on s'intéresse à leurs propriétés métriques.

Courbure des courbes planes

On suppose maintenant que $\mathcal{E}$ est un *plan* (affine euclidien) *orienté*.

Soit $s \mapsto f(s)$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc (voir au besoin le § VIII.4). Le vecteur tangent au point défini par s est un vecteur unitaire, on le note $\tau(s)$. Soit $n(s)$ l'unique vecteur unitaire tel que $(\tau(s), n(s))$ soit une base orthonormée directe de E. On l'appelle le vecteur *normal*.

En dérivant par rapport à s la relation $\|\tau(s)\|^2 = 1$, on voit que $\tau'(s)$ est perpendiculaire à $\tau(s)$, c'est donc un vecteur colinéaire à $n(s)$. Il existe alors un scalaire $K(s)$ tel que

$$\tau'(s) = K(s)n(s).$$

On appelle $K(s)$ la *courbure algébrique* de la courbe au point de paramètre s. Son signe dépend du choix de l'orientation du plan et de celle donnée sur la courbe par le paramètre s.

Comme $\tau(s) \cdot n(s) = 0$, on obtient, en dérivant, l'égalité

$$\tau'(s) \cdot n(s) + \tau(s) \cdot n'(s) = 0.$$

Comme $\|n(s)\|^2 = 1$, on voit de même que $n'(s)$ est colinéaire à $\tau(s)$, et donc aussi que

$$n'(s) = -K(s)\tau(s).$$

Remarque VIII.2.1. On peut formuler ce résultat ainsi : la matrice donnant $d\tau/ds$ et dn/ds dans la base orthonormée (τ, n) est antisymétrique (voir aussi l'exercice VIII.21).

La courbure $K(s)$ est positive quand la courbe est située (localement) dans le demi-plan défini par la tangente et contenant le vecteur normal $n(s)$, c'est-à-dire quand la courbe « tourne à gauche ». La courbure $K(s)$ s'annule quand

$\tau'(s) = 0$, en particulier quand la courbe a un point d'inflexion pour la valeur s du paramètre (voir les rappels au § VIII.4). Par exemple, une droite a une courbure identiquement nulle.

Exemple VIII.2.2. Considérons un cercle de rayon R. L'origine étant choisie en son centre, on identifie le plan affine euclidien $\mathcal{E}$ à $\mathbf{C}$. Un paramétrage par la longueur d'arc est

$$s \longmapsto Re^{is/R},$$

pour lequel $\tau(s) = ie^{is/R}$. Avec l'orientation du plan donnée par $(1, i)$, on a

$$n(s) = -e^{is/R} \text{ et } \frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{R}e^{is/R} = \frac{1}{R}n(s).$$

La courbure d'un cercle est une constante, égale à l'inverse du rayon (au signe près, selon les choix d'orientation faits).

Rayon de courbure, centre de courbure

Par analogie avec le rayon d'un cercle, on introduit, quand $K(s) \neq 0$, le *rayon de courbure* $\rho(s)$ défini par l'égalité

$$\rho(s) = \frac{1}{K(s)}$$

et le *centre de courbure* $C(s)$ défini par $C(s) = g(s) + \rho(s)n(s)$, où l'on a utilisé la notation « $M = A + \overrightarrow{AM}$ » introduite dans la remarque I.2.3, particulièrement agréable ici. Il est équivalent de définir $C(s)$ par l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{g(s)C(s)} = \rho(s)n(s)$. Voir la figure 8. Le cercle de centre $C(s)$ et de rayon $|\rho(s)|$ est dit *cercle osculateur*, c'est le cercle qui approche le mieux[9] la courbe en $f(s)$ — en un sens très précis, voir l'exercice VIII.22.

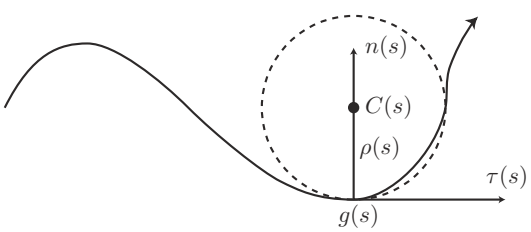


Figure 8

[9] Voilà pourquoi, pour bien dessiner la courbe au voisinage de $g(s)$, c'est en $C(s)$ qu'il faut poser la main.

Remarques VIII.2.3

(1) Si $K(s)$ et $\rho(s)$ dépendent de l'orientation choisie pour le plan et de l'orientation de la courbe, il n'en est pas de même de $C(s)$: changer d'orientation change à la fois le signe de $n(s)$ et celui de $\rho(s)$.

(2) Quand la courbure $K(s)$ n'est pas nulle, la courbe et son centre de courbure sont, localement au voisinage de $f(s)$, du même côté de la tangente (voir aussi le § VIII.4).

VIII.3. Développées

On se place comme ci-dessus dans un plan affine euclidien. On s'intéresse maintenant à l'enveloppe des droites normales (c'est-à-dire orthogonales) à une courbe.

Proposition VIII.3.1. *Soit $f : I \to \mathcal{E}$ un paramétrage de classe $\mathcal{C}^3$ d'une courbe plane. On suppose que la courbure ne s'annule pas sur I. Soit $\mathcal{D}_t$ la normale à la courbe au point de paramètre t. L'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ est l'ensemble des centres de courbure.*

Démonstration. On peut supposer que f est un paramétrage par la longueur d'arc s. On oriente le plan et on utilise les notations τ et n comme ci-dessus. Un point P du plan est sur la droite $\mathcal{D}_s$ si et seulement s'il vérifie l'équation $\overrightarrow{f(s)P} \cdot \tau(s) = 0$ (ce qui est une équation de $\mathcal{D}_s$, si l'on veut). On dérive cette équation par rapport à s, ce qui donne $-\tau(s) \cdot \tau(s) + \overrightarrow{f(s)P} \cdot \tau'(s) = 0$, on y remplace $\tau'(s)$ par sa valeur pour obtenir $K(s)(\overrightarrow{f(s)P} \cdot n(s)) = \|\tau(s)\|^2 = 1$. Comme $K(s)$ n'est pas nulle, on obtient deux équations pour déterminer l'inconnue P :

$$\begin{cases} \overrightarrow{f(s)P} \cdot \tau(s) & = 0 \\ \overrightarrow{f(s)P} \cdot n(s) & = \dfrac{1}{K(s)} = \rho(s). \end{cases}$$

C'est un système linéaire dont l'unique solution est le point P de la normale tel que $\overrightarrow{f(s)P} = \rho(s)n(s)$, c'est-à-dire le point $P = C(s)$. □

On appelle *développée* l'enveloppe des normales (ou le lieu des centres de courbure).

Parallèles

Si $s \mapsto f(s)$ est un paramétrage d'une courbe γ par la longueur d'arc, on considère les courbes *parallèles* γ_a, celles qui sont définies par le paramétrage f_a :

$$f_a(s) = f(s) + an(s)$$

pour un a fixé dans $\mathbf{R}$ (figure 9).

***Proposition VIII.3.2* (Principe de Huygens).** *La courbe f_a a un point singulier pour chaque valeur de s telle que $\rho(s) = a$. L'ensemble de ces points singuliers (quand a varie) est la développée de la courbe γ.*

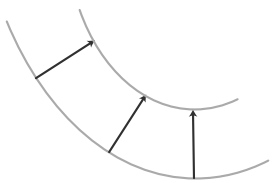


Figure 9. Courbes parallèles

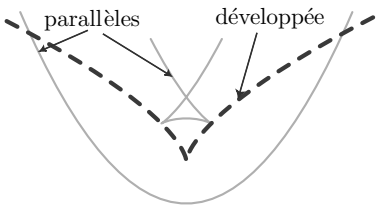


Figure 10. Principe de Huygens

Démonstration. Pour ce calcul, il est plus simple de choisir une origine du plan affine : $f(s)$ et $f_a(s)$ sont désormais des vecteurs. On cherche les points singuliers de γ_a, c'est-à-dire les s tels que df_a/ds s'annule :

$$0 = \frac{d}{ds}\left(f(s) + an(s)\right) = \tau(s) + an'(s) = (1 - aK(s))\tau(s),$$

ce qui donne $\rho(s) = a$. L'ensemble des points singuliers s'obtient en remplaçant a par $\rho(s)$ dans $f_a(s)$, il est donc paramétré par $s \mapsto f(s) + \rho(s)n(s)$. C'est bien la développée de γ. □

Remarque VIII.3.3. Cette proposition, illustrée par la figure 10, est connue en optique géométrique sous le nom de « principe de Huygens ». On considère la courbe comme (le bord d') une source lumineuse : elle émet des rayons lumineux rectilignes et qui lui sont perpendiculaires. La courbe parallèle γ_a représente l'endroit où sont arrivées, à l'instant a, les ondes émises à l'instant 0, ce qu'on appelle un *front d'onde*. La développée, enveloppe des normales, est la *caustique* de la courbe lumineuse, sur laquelle il y a concentration de l'intensité de la lumière. Le principe de Huygens affirme qu'elle est constituée des points singuliers de tous les fronts d'onde.

VIII.4. Appendice : rappels sur les courbes paramétrées

Il s'agit ici de très brefs rappels. Voir par exemple [**9**] ou [**33**] pour un exposé plus détaillé. Commençons par des propriétés affines.

Une *courbe paramétrée* de classe $\mathcal{C}^k$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ dans un espace affine $\mathcal{E}$.

Singularités

Un point $t_0 \in I$ est *régulier* si le vecteur $f'(t_0)$ n'est pas nul, *singulier* sinon. Une courbe paramétrée est *régulière* si toutes les valeurs du paramètre sont des points réguliers. Si t_0 est régulier, le vecteur $f'(t_0)$ est *tangent* à la courbe, la droite affine passant par $f(t_0)$ et dirigée par $f'(t_0)$ est appelée la *tangente* à la courbe paramétrée en $f(t_0)$.

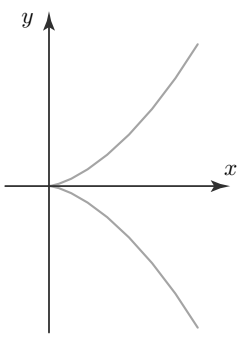


Figure 11. Cubique cuspidale

Exemple VIII.4.1. Dans le plan $\mathcal{E} = \mathbf{R}^2$, considérons la courbe paramétrée par l'application $t \mapsto (t^2, t^3)$ (figure 11). On vérifie sans mal que tous les points de $\mathbf{R}$ sont réguliers sauf 0. La tangente en (t_0^2, t_0^3) est dirigée par le vecteur $(2t_0, 3t_0^2)$. Le point 0 est un *point de rebroussement*.

Position d'une courbe plane par rapport à sa tangente

On suppose que $k \geq 2$. On se place en un point régulier (ainsi $f'(t_0) \neq 0$). On développe f au voisinage de t_0 par la formule de Taylor

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + o((t - t_0)^2).$$

Ainsi si $f'(t_0)$ et $f''(t_0)$ sont deux vecteurs indépendants, la courbe est située, au voisinage de $f(t_0)$, d'un seul côté de sa tangente, elle est contenue dans le demi-plan défini par la tangente et contenant $f''(t_0)$ (voir la figure 12, qui représente la courbe et la base $(f'(t_0), f''(t_0))$).

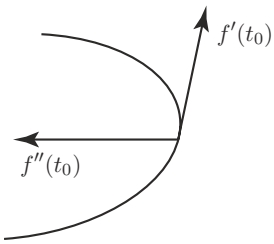


Figure 12

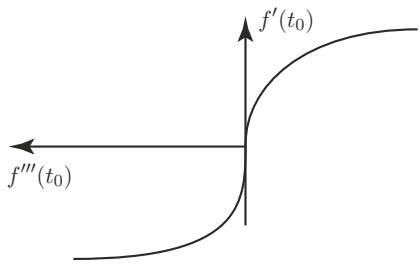


Figure 13

Par contre, si les deux vecteurs sont colinéaires, si $k \geq 3$ et si, par exemple, $f'''(t_0)$ est un vecteur indépendant de $f'(t_0)$, le développement donne

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\,(1 + \lambda(t - t_0))\,f'(t_0) + \frac{1}{6}(t - t_0)^3 f'''(t_0) + o((t - t_0)^3)$$

de sorte que la courbe traverse sa tangente (figure 13), on a un *point d'inflexion*.

Branches infinies et asymptotes

Une courbe plane peut avoir des branches infinies et ces branches infinies peuvent avoir des asymptotes. On dit qu'une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbf{R}^2$ a une *branche infinie* en une des extrémités a (éventuellement infinie) de l'intervalle ouvert I si $\lim_{t\to a} \|f(t)\| = +\infty$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{R}^2$. On dit qu'une droite D est une *asymptote* pour la courbe paramétrée par $f : I \to \mathbf{R}^2$ si celle-ci a une branche infinie en a et si de plus $\lim_{t\to a} d(f(t), D) = 0$, où d est la distance usuelle sur $\mathbf{R}^2$.

***Remarque VIII.4.2* (Importante).** Les notions de branche infinie et d'asymptote sont des notions *affines !* Et ceci bien qu'on ait utilisé la norme euclidienne de $\mathbf{R}^2$ pour les définir. En effet, il est clair que toute norme équivalente donnerait les branches infinies et les mêmes asymptotes[10]. Or, sur $\mathbf{R}^2$, toutes les normes sont équivalentes (voir par exemple [**13**]). D'autre part, il est facile de vérifier aussi que ces notions ne dépendent pas du paramétrage choisi.

Abscisse curviligne

Venons-en maintenant aux propriétés métriques. L'espace affine $\mathcal{E}$ est donc désormais supposé euclidien. Étant donnée une courbe paramétrée, la direction de sa tangente en un point est géométrique (ne dépend pas du paramétrage), mais

[10] Pour les lectrices « projectives » : une asymptote est une tangente à l'infini, la notion d'asymptote doit donc être aussi affine que celle de tangente.

le vecteur tangent, lui, dépend du paramétrage choisi. On se demande maintenant si on peut trouver un paramétrage qui donne, en chaque point, un vecteur tangent *unitaire*.

Proposition VIII.4.3. *Soit $f : I \to \mathcal{E}$ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^1$. On fixe un point $t_0 \in I$ et on définit, pour tout t dans I,*

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| f'(u) \right\| du.$$

Alors φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de I sur l'intervalle $J = \varphi(I)$. L'application $g = f \circ \varphi^{-1}$ est un paramétrage de la même courbe qui vérifie

$$\left\| g'(s) \right\| = 1 \quad \forall\, s \in J.$$

Démonstration. Le vecteur $f'(t)$ ne s'annule pas et la fonction $x \mapsto \|x\|$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $E - \{0\}$, donc la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Sa dérivée $\varphi'(t) = \|f'(t)\|$ est strictement positive pour tout t. On en déduit que φ est strictement croissante et qu'elle admet une fonction réciproque, elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Calculons enfin le vecteur dérivé de g. C'est

$$g'(s) = f' \circ \varphi^{-1}(s) \left(\varphi^{-1}\right)'(s) = \frac{f' \circ \varphi^{-1}(s)}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(s)} = \frac{f' \circ \varphi^{-1}(s)}{\|f' \circ \varphi^{-1}(s)\|},$$

qui est bien de norme 1. □

Un paramètre comme le s ainsi obtenu s'appelle *abscisse curviligne* ou *paramétrage par la longueur d'arc* parce que

$$s_2 - s_1 = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| f'(t) \right\| dt$$

est la *longueur* de l'arc de $g(s_1)$ à $g(s_2)$. C'est une *définition* de la longueur d'un arc. La terminologie se justifie, par exemple, en approchant la courbe par des lignes polygonales inscrites (voir par exemple [**17**]).

La proposition VIII.4.3 fournit l'unique paramétrage par la longueur d'arc tel que $g(0) = f(t_0)$ et $g'(s) = \lambda f'(t)$ avec $\lambda > 0$. Toute abscisse curviligne s' est de la forme $s' = \pm s - a$.

Exercices et problèmes

Exercice VIII.1. Soit $\mathcal{C}$ une conique du plan $\mathbf{R}^2$ et soit A un point de $\mathcal{C}$. La droite $\mathcal{D}_t$ de pente t passant par A rencontre en général $\mathcal{C}$ en un deuxième point, noté M_t, de coordonnées $(x(t), y(t))$. Montrer que l'application $t \mapsto (x(t), y(t))$,

de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$, paramètre $\mathcal{C} - \{A\}$ par des fractions rationnelles. Trouver un paramétrage du cercle $x^2 + y^2 = 1$ (privé d'un point) par des fractions rationnelles.

Exercice VIII.2. Dessiner la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $y^2 = x^2(x+1)$. En combien de points une droite issue de l'origine la rencontre-t-elle ? Trouver un paramétrage de $\mathcal{C}$ par des fractions rationnelles. Mêmes questions pour la cubique cuspidale $y^2 = x^3$ (figure 11).

***Exercice VIII.3* (Lemniscate de Bernoulli).** Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$x = \frac{t}{1+t^4} \text{ et } y = \frac{t^3}{1+t^4}.$$

Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ et la dessiner (la courbe).

Exercice VIII.4. Quelle est la courbe inverse d'une hyperbole équilatère par une inversion de pôle son centre de symétrie ? On étudiera l'aspect général de la courbe et on en donnera une équation cartésienne ainsi qu'une équation en coordonnées polaires.

Exercice VIII.5. Dessiner la courbe plane paramétrée par

$$x = t + \frac{1}{2t^2} \text{ et } y = t^2 + \frac{2}{t}$$

en précisant les points singuliers et le comportement à l'infini (la courbe est asymptote à deux paraboles).

***Exercice VIII.6* (Discriminant).** Soit $\mathcal{E}$ l'espace (affine réel de dimension 2) des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ de la forme

$$P(X) = X^3 - 3aX + 2b.$$

Décrire par des équations paramétriques la courbe de $\mathcal{E}$ constituée des polynômes qui ont une racine multiple, la dessiner. À quoi correspond son point singulier ? Décrire les deux composantes du complémentaire en termes des racines des polynômes.

Enveloppes

Exercice VIII.7. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites (distinctes) du plan. Deux points M et M' parcourent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ avec des vitesses proportionnelles (figure 14). Trouver l'enveloppe de la droite MM'. On pourra considérer le centre F de la similitude directe qui envoie chaque point M sur le point M' correspondant et montrer que l'enveloppe est une parabole de foyer F.

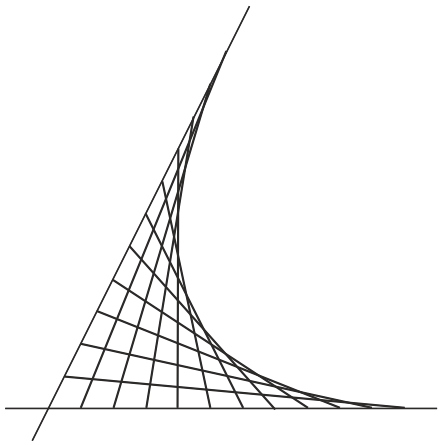


Figure 14. Encore Dürer

Exercice VIII.8. Dans un plan euclidien, on donne deux droites D et D' perpendiculaires en un point O et munies de vecteurs de base. Deux points A et A' varient sur D et D' de façon que

$$\overline{OA} + \overline{OA'} = a$$

soit un nombre strictement positif fixé.

– Trouver l'enveloppe de la médiatrice de AA'.
– Quel est le lieu du milieu de AA' ?
– Quelle est l'enveloppe de la droite AA' ?

Exercice VIII.9. On reprend les notations de l'exercice I.61. Le point P est fixé, mais M varie sur AP. Quelle est l'enveloppe de la perpendiculaire à $B'C'$ en M ? On pourra montrer que le point d'intersection F de BC et $B'C'$ est fixe.

Exercice VIII.10. Dans un plan affine euclidien, on donne un cercle $\mathcal{C}$ et un point F hors de $\mathcal{C}$. Un point M décrit $\mathcal{C}$. Quelle est l'enveloppe de la médiatrice du segment MF ?

Exercice VIII.11. Montrer que la courbe dont une équation en coordonnées polaires est $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ est une cardioïde.

Exercice VIII.12. Quel est le groupe des isométries qui préservent une hypocycloïde à trois rebroussements ?

***Exercice VIII.13* (Caustiques, antennes paraboliques).** Une famille de droites parallèles à l'axe d'une parabole se réfléchit sur cette parabole (l'angle fait par le

rayon réfléchi avec la normale est égal à l'angle fait par cette normale avec le rayon incident). Quelle est l'enveloppe des rayons réfléchis ?

***Exercice VIII.14* (Caustiques, un cœur dans un bol).** Une famille de droites parallèles se réfléchit sur un cercle (voir la figure 15). Montrer que l'enveloppe de la

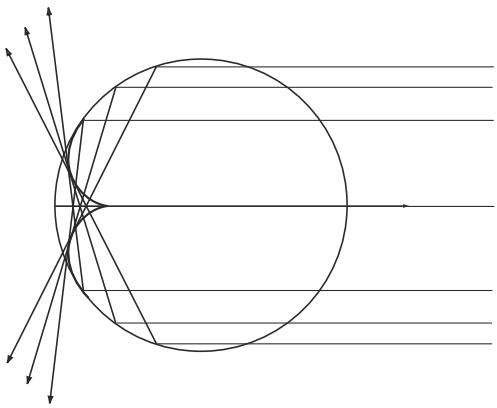


Figure 15

famille des droites réfléchies est une néphroïde[11].

***Exercice VIII.15* (Caustiques, arc-en-ciel).** « Il y a un arc-en-ciel dans mon cœur » [**25**]. Une droite $\mathcal{D}$ se réfléchit sur un cercle puis est réfractée selon la loi de Descartes (en anglais, Snell)[12] en sortant de ce cercle (figure 16). La nouvelle droite est appelée $\mathcal{D}'$. On s'intéresse à l'enveloppe des droites $\mathcal{D}'$ quand $\mathcal{D}$ décrit une famille de droites parallèles. Écrire les équations et montrer que cette courbe a une asymptote.

Des rayons de soleil rencontrent une goutte de pluie sphérique, se réfléchissent et sont réfractés selon la loi ci-dessus. Montrer que les rayons transformés enveloppent une surface qui a un cône asymptote, d'axe parallèle à la direction des rayons incidents.

Un point O est fixé (œil de l'observateur) ainsi qu'un plan P (rideau de pluie). À chaque point M de P est associé un cône C_M de sommet M, d'axe orthogonal

[11] Dans la vie réelle où des rayons lumineux se réfléchissent sur la paroi d'un bol, seul un demi-cercle intervient, c'est pourquoi ce que vous voyez dans votre bol tous les matins est une demi-néphroïde, d'où la forme de cœur.

[12] C'est-à-dire que l'angle θ_1 que fait le rayon incident avec le vecteur normal à la surface séparant l'air et l'eau et l'angle θ_2 que fait le vecteur réfracté avec le même vecteur normal sont reliés par $n \sin\theta_1 = \sin\theta_2$, où n est une constante qui dépend du milieu (l'eau ici) et de la longueur d'onde de la lumière utilisée.

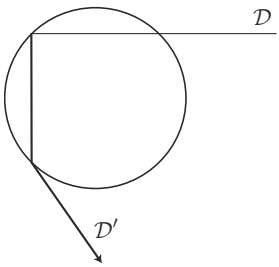


Figure 16

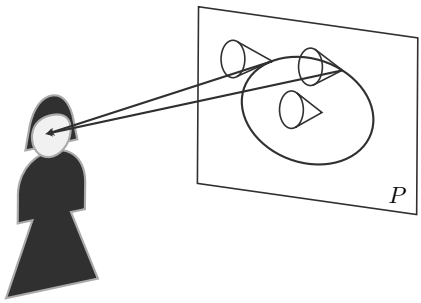


Figure 17

à P et d'angle au sommet constant (figure 17). Vérifier que l'ensemble des points M du plan tels que OM soit une génératrice du cône C_M (c'est ce que voit l'observateur) est un cercle[13].

Exercice VIII.16. Un cercle $\mathcal{C}$ roule sans glisser sur un cercle $\mathcal{C}'$. Le point M de (la circonférence) $\mathcal{C}$ décrit une courbe. Montrer que c'est une épicycloïde si $\mathcal{C}$ est tangent extérieurement à $\mathcal{C}'$ et une hypocycloïde s'il lui est tangent intérieurement[14].

Exercice VIII.17. On donne un cercle, un point A de ce cercle et une direction de droite D. À tout point M du cercle, on associe la droite $\mathcal{D}_M$ qui passe par M et est telle que D soit parallèle à une bissectrice de l'angle $(AM, \mathcal{D}_M)$. Montrer que l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_M$ quand M parcourt le cercle est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Exercice VIII.18. La droite PQ, où P est un point de BC, coupe le triangle ABC en deux triangles d'aires égales (comme dans l'exercice V.21). Quelle est l'enveloppe de PQ quand P parcourt BC ?

***Exercice VIII.19* (Enveloppe des droites de Simson).** Soit ABC un triangle d'orthocentre H et de cercle circonscrit $\mathcal{C}$. Soit M un point de $\mathcal{C}$. Ses projections sur les trois côtés du triangle sont appelées M_A (sur BC), M_B (sur CA) et M_C

[13] On a décrit ici un arc-en-ciel monochromatique — c'est moins joli ! L'indice de réfraction, et donc aussi le cône obtenu, dépend de la couleur, donc chaque couleur produit son propre cône et l'observateur voit plusieurs cercles concentriques. D'autre part, certains rayons se réfléchissent deux (ou même plusieurs) fois avant l'ultime réfraction. C'est ce qui produit le deuxième arc-en-ciel que l'on voit parfois. La description donnée ici est due à Newton. Voir **[8]** pour d'autres points de vue sur l'arc-en-ciel et, par exemple, la bande dessinée **[52]** pour des explications générales sur les caustiques.

[14] C'est ce qui justifie les préfixes épi et hypo.

(sur AB). Elles sont alignées sur la droite de Simson de M, notée S_M (voir l'exercice III.32). Soient m_A, m_B et m_C les symétriques de M par rapport à BC, CA et AB. Ils sont alignés sur une droite D_M, la droite de Steiner de M (voir l'exercice III.33). Quelle est l'enveloppe des droites de Steiner D_M quand M parcourt $\mathcal{C}$?

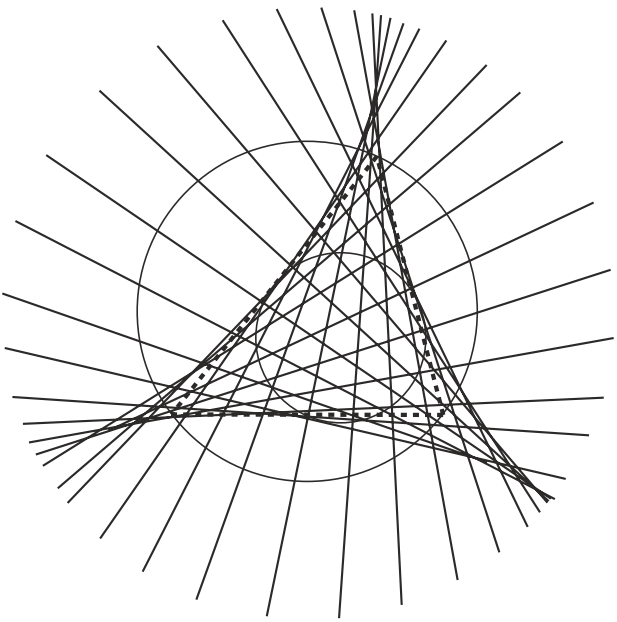


Figure 18

Soit μ le milieu de HM. Montrer que μ est sur le cercle d'Euler de ABC (exercice II.21) et sur la droite de Simson S_M. Montrer que l'enveloppe des droites de Simson est une hypocycloïde à trois rebroussements[15] tritangente au cercle d'Euler.

Propriétés métriques

***Exercice VIII.20* (Courbure et torsion en dimension 3).** Soit $s \mapsto f(s)$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc dans un espace euclidien orienté de dimension 3. On suppose que le vecteur $\tau'(s)$ ne s'annule pas. On définit les vecteurs n et b par

$$\tau(s) = f'(s), \qquad n(s) = \tau'(s)/\left\|\tau'(s)\right\|, \qquad b(s) = \tau(s) \wedge n(s),$$

[15] Naturellement associée à un triangle *quelconque*, une figure possédant les mêmes symétries qu'un triangle équilatéral ! Il y a aussi le triangle de Morley, voir **[5]** ou **[14]**.

de sorte que (τ, n, b) est une base orthonormée directe. Montrer qu'il existe des nombres $K(s)$ et $T(s)$ (courbure et torsion) tels que

$$\begin{cases} \tau'(s) &= K(s)n(s) \\ n'(s) &= -K(s)\tau(s) - T(s)b(s) \\ b'(s) &= T(s)n(s) \end{cases}$$

(formules de Frenet). Trouver la courbure et la torsion quand la courbe est plane ; quand c'est une hélice circulaire $(t \mapsto (a\cos t, a\sin t, kt))$.

Exercice VIII.21. Soit $s \mapsto A(s)$ une famille différentiable à un paramètre de matrices orthogonales d'ordre n (une courbe dans $\mathrm{O}(n)$ si l'on préfère). Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $B(s)$ telle que l'on ait, pour tout s,

$$\frac{dA}{ds} = A(s)B(s).$$

Quel rapport cette relation a-t-elle avec la remarque VIII.2.1 et/ou avec l'exercice VIII.20 ?

***Exercice VIII.22* (Cercle osculateur).** Soit $t \mapsto f(t)$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $m = f(t_0)$ un point où la courbure n'est pas nulle. Pour $t \neq t_0$ dans un voisinage de t_0, montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}(t)$ passant par $f(t)$ et tangent à la courbe en m. On appelle $O(t)$ son centre et $R(t)$ son rayon. Montrer que

$$\lim_{t\to t_0} O(t) \text{ et } \lim_{t\to t_0} R(t)$$

sont respectivement le centre de courbure et le rayon de courbure en m. On peut donc dire que le cercle « $\lim_{t\to t_0} \mathcal{C}(t)$ » est le cercle

– centré au centre de courbure et
– de rayon le rayon de courbure,

que nous avons appelé cercle osculateur à la courbe en m.

Exercice VIII.23. Montrer que la courbe $\varphi \mapsto 4(\cos^3\varphi + i\sin^3\varphi)$ est une astroïde (hypocycloïde à quatre rebroussements).

Montrer que la développée d'une ellipse est la transformée d'une astroïde par une affinité.

Exercice VIII.24. Montrer que les points singuliers de la développée correspondent aux extrema de la courbure[16].

[16] Par exemple, dans l'exercice VIII.23, les quatre points singuliers de l'astroïde correspondent aux quatre sommets de l'ellipse.

Exercice VIII.25. Quelle est la développée de la parabole $y^2 = 2px$?

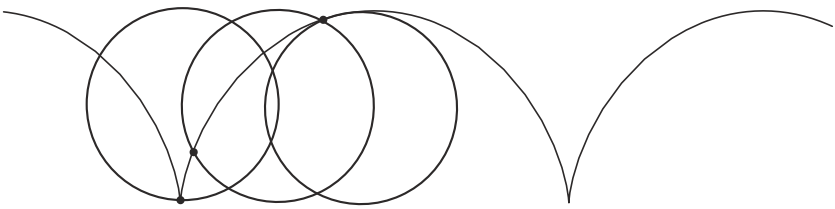


Figure 19. Cycloïde

Exercice VIII.26. On considère une cycloïde $\mathcal{C}$ (figure 19), courbe décrite par un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur une droite. Montrer qu'elle peut être paramétrée par

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

et montrer que la développée de $\mathcal{C}$ est aussi une cycloïde, translatée de $\mathcal{C}$.

Courbes résolvant les problèmes de construction

***Exercice VIII.27* (La cissoïde de Dioclès).** Soient $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $1/2$, O et A deux points diamétralement opposés, $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Une droite Δ passant par O recoupe $\mathcal{C}$ en P et coupe $\mathcal{D}$ en Q. La cissoïde de Dioclès est le lieu Γ des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$ lorsque Δ varie. On remarquera que les points de Γ se construisent à la règle et au compas.

Montrer que des équations paramétriques de Γ dans un repère bien choisi sont

$$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^2}$$

et qu'une équation cartésienne (dans le même repère) en est

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}.$$

Dessiner Γ, en mettant en évidence son point singulier et son asymptote.

Soit E un point de la tangente à $\mathcal{C}$ en O tel que $OE = 2$, soient F le point d'intersection de AE et de Γ et $G = OF \cap \mathcal{D}$. Calculer AG. Pourquoi, malgré la remarque ci-dessus, cette construction ne permet-elle pas la duplication du cube (voir le § IV.3) ?

***Exercice VIII.28* (La trissectrice de Mac Laurin).** Vérifier que

$$\operatorname{tg}(3\theta) = \frac{3\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^3\theta}{1 - 3\operatorname{tg}^2\theta}.$$

On donne un segment OA et son milieu Ω. On souhaite déterminer le lieu Γ des points M tels que

$$\widehat{A\Omega M} = 3\widehat{AOM}.$$

On choisit un repère dont l'origine soit en O et tel que les coordonnées de A soient $(0, -2)$. Soient B le symétrique de A par rapport à O, $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre OB et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Une droite Δ passant par O coupe $\mathcal{D}$ en Q et $\mathcal{C}$ en P. Soit M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$. Montrer que le lieu des points M quand Δ varie est le lieu Γ. On remarquera donc que les points de Γ se construisent à la règle et au compas.

Si x et y sont les coordonnées d'un point de Γ, on a donc,

$$\text{pour } \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{y}{x+a} = \operatorname{tg}(3\theta).$$

En déduire une équation cartésienne de Γ et dessiner celle-ci. Pourquoi, malgré la remarque ci-dessus, cette construction ne permet-elle pas la trissection de l'angle (voir le § IV.3) ?

***Exercice VIII.29* (La conchoïde de Nicomède).** Un donne un réel $a \in]0, 1[$. Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$. À tout point M de $\mathcal{D}$, on associe le point M' de la demi-droite OM tel que $MM' = 2$. Le lieu des points M' lorsque M parcourt $\mathcal{D}$ est une courbe Γ.

Montrer qu'une équation polaire de Γ est

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + 2, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

et que Γ est une des branches de la courbe algébrique d'équation

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - 4x^2 = 0.$$

Dessiner Γ.

Soit A l'un des points d'intersection du cercle de centre O et de rayon 1 avec la droite $\mathcal{D}$. Soit A' le point de Γ dont la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ est A. Montrer que la droite OA' est une trissectrice de l'angle formé par l'axe des x et OA.

***Exercice VIII.30* (La quadratrice de Dinostrate).** On donne un repère orthonormé d'origine un point O et le carré dont les sommets sont O et les points de coordonnées $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Une droite OP tourne uniformément autour de O pendant qu'une droite QR parallèle à l'axe des abscisses se déplace uniformément

de « haut » en « bas ». La première est verticale à l'instant 0 et horizontale à l'instant 1, alors que la seconde est la droite $y = 1$ à l'instant 0 et l'axe des x à l'instant 1. Le point d'intersection M de OP et de QR décrit une courbe Γ.

Montrer qu'une équation cartésienne de Γ est

$$y = x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

et une équation en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{2\theta}{\pi \sin \theta}.$$

Dessiner cette courbe.

Montrer que le point d'intersection de Γ avec l'axe des x a pour abscisse $2/\pi$. Si ce point était constructible, on en déduirait une construction de $\sqrt{\pi}$, la quadrature du cercle, d'où le nom de la courbe en question.

Cette courbe permet aussi la trissection de l'angle : étant donné un angle θ, correspondant à une position de la droite OP et à un point M de Γ, on projette M sur l'axe des y en un point m, on construit ensuite m', toujours sur l'axe des y, tel que $Om' = Om/3$, puis M' sur Γ et OM' est une trissectrice de l'angle de départ.

IX

SURFACES DANS L'ESPACE

Ce chapitre est une introduction aux propriétés locales des surfaces de l'espace de dimension 3. Avant d'en venir à des définitions qui sont nécessairement un peu lourdes, je donne quelques exemples simples d'objets dont je suis sûre que tous les lecteurs ont envie de les appeler des surfaces : surfaces de révolution, surfaces réglées, *etc.* J'en viens ensuite aux définitions et aux propriétés affines, plan tangent et position par rapport au plan tangent notamment. La dernière partie est consacrée aux propriétés métriques des surfaces d'un espace euclidien, en particulier à la courbure de Gauss.

Bien qu'il n'y ait pas de résultat global dans ce chapitre, j'espère qu'il contient assez d'exemples et d'applications pour n'être pas ennuyeux. Deux bonnes références sur les sujets abordés ici sont, d'une part l'article *Géométrie différentielle classique* de *l'Encyclopædia Universalis* [**35**] et d'autre part les tomes 2 et 3 de [**51**].

IX.1. Exemples de surfaces dans l'espace

Il s'agit ici d'un paragraphe d'exemples. Il est volontairement un peu vague : je n'insiste pas sur les hypothèses de régularité pour ne pas alourdir une présentation supposée allécher les lectrices.

Les quadriques

Nous avons déjà rencontré quelques exemples de surfaces dans ce livre, les sphères et plus généralement les quadriques de l'espace de dimension 3, ellipsoïdes, hyperboloïdes et paraboloïdes (voir le § VII.5).

Voici d'autres exemples de surfaces, qui sont construites à partir de courbes, les surfaces de révolution, les surfaces réglées.

Les surfaces de révolution

On considère une courbe plane C et on la fait tourner autour d'une droite D du plan qui la contient. La droite D est appelée *l'axe de révolution* (figure 1).

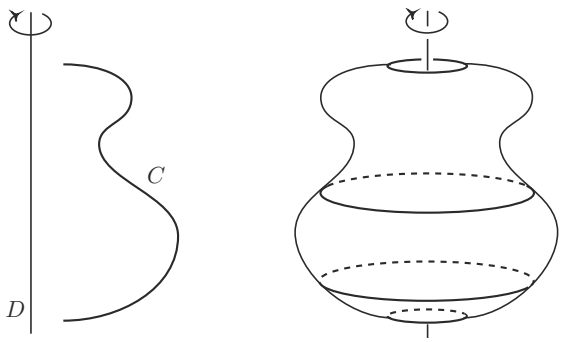


Figure 1

Exemples IX.1.1

– Si la courbe C est une droite, la surface obtenue est un *cylindre* si les droites C et D sont parallèles, un plan si elles sont perpendiculaires et un *cône* sinon.

– Si la courbe C est un cercle, la surface obtenue est une sphère si la droite D est un diamètre de C, un *tore de révolution* (une chambre à air sans valve) si D et C ne se coupent pas.

Par définition, la surface de révolution S est invariante par le groupe des rotations autour de l'axe D. Si M est un point de S, alors le cercle d'axe D qui contient M est tout entier contenu dans S. On l'appelle un *parallèle* par analogie avec le cas de la Terre. La même analogie fait appeler *méridiens* les intersections de S avec les demi-plans limités par D. Tout méridien est l'image de C par une rotation d'axe D. Il est très facile de décrire la surface S par des équations paramétriques, resp. cartésiennes, à partir d'équations du même type pour C (voir l'exercice IX.1).

Les surfaces réglées

On promène une famille de droites le long d'une courbe. Précisément, on donne une courbe Γ et, pour tout point p de Γ, un vecteur non nul $w(p)$. Par chaque

point p de Γ on fait passer une droite, notée D_p, dirigée par $w(p)$. La surface réglée est la réunion des droites D_p.

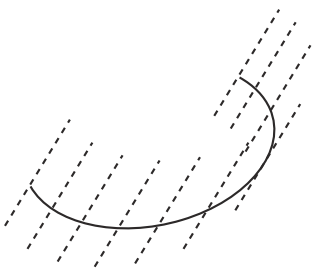


Figure 2

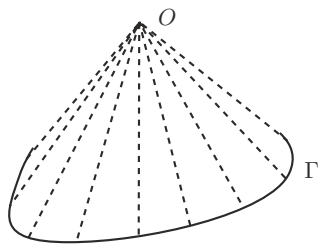


Figure 3

Les exemples les plus simples sont ceux des *cylindres*, cas où le vecteur $w(p)$ est *fixe* : $w(p) \equiv w$ (figure 2) et des *cônes*, où $w(p) = \overrightarrow{Op}$ pour un point O fixe appelé *sommet* du cône (figure 3). Il y a d'autres exemples parmi les quadriques. Toutes

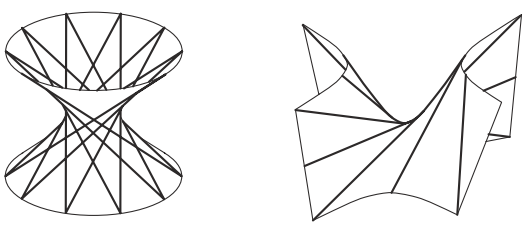


Figure 4

les quadriques contiennent des droites (exercice VII.47), c'est dans leur nature, même si ces droites sont souvent imaginaires comme dans le cas des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes. On doit donc voir apparaître des quadriques parmi les surfaces réglées. Les hyperboloïdes à une nappe sont des surfaces réglées (voir l'exercice IX.5). Voici un autre exemple, qui appartient à la même famille. La courbe Γ est l'axe des x et le vecteur $w(x)$ le vecteur de coordonnées $(0, 1, x)$, de sorte que

$$(x, t) \longmapsto (x, 1 + t, x + tx)$$

est un paramétrage de la surface réglée qu'ils définissent. On voit sans mal une équation cartésienne de cette surface, tout simplement $z = xy$. Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique, tel celui que nous avons rencontré au § VII.5 et que l'on appelle aussi « selle de cheval » ou, mieux, « col » (figure 4).

On trouvera des exemples de surfaces réglées ou de révolution dans les exercices de ce chapitre. Tous sont classiques, ils viennent du tome 3 de [**51**], où ils sont agréablement réunis.

IX.2. Géométrie différentielle des surfaces de l'espace

Définitions

Après ces quelques exemples, ou familles d'exemples, il est temps de donner une définition de ce que peut être une surface. De même qu'on définit une courbe par une application d'un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ dans un espace affine, on va considérer qu'une surface est définie par des applications $f : U \longrightarrow \mathcal{E}$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3. On se doute bien qu'il faudra aussi faire des hypothèses de différentiabilité.

Définition IX.2.1. On appelle *nappe paramétrée* de classe $\mathcal{C}^k$, pour $k \geq 1$, une application f de classe $\mathcal{C}^k$ définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$:

$$f : U \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Deux nappes paramétrées (f, U) et (g, V) sont *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\varphi : V \to U$, de classe $\mathcal{C}^k$, tel que $g = f \circ \varphi$. Une classe d'équivalence est appelée une *nappe géométrique* de classe $\mathcal{C}^k$.

Les lecteurs doivent évidemment vérifier que cette équivalence est bien une relation d'équivalence.

Ce à quoi on pense vraiment, quand on parle d'une surface, c'est plutôt à l'image commune de tous les paramétrages d'une nappe géométrique, que nous appellerons *support* de la nappe géométrique. On fera souvent les abus de langage que les lectrices imaginent. On appellera généralement *surface* une partie de l'espace qui est, au moins au voisinage de chacun de ses points, une nappe géométrique. Par exemple, une sphère, plus généralement une quadrique, sont des surfaces (pourquoi ?).

Points réguliers

À vrai dire, il n'y a pas encore de raison pour que l'image des nappes paramétrées ainsi définies soit vraiment quelque chose que l'on ait envie d'appeler une surface. Par exemple, l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u, 0, 0) \end{array}$$

a pour image quelque chose qu'on aurait plutôt envie d'appeler une courbe ! On va demander à f d'être « un petit peu injective ». S'il y a des guillemets, c'est que l'injectivité à proprement parler n'est pas vraiment le problème. On pourrait tolérer que la surface se recoupe, comme sur la figure 5, mais on voudrait qu'il y ait assez de points $m_0 \in \mathbf{R}^2$ tels que l'image d'un petit voisinage de ces points ressemble beaucoup à un petit morceau de plan (figure 6). Maintenant, près d'un point m_0, f ressemble beaucoup à sa différentielle df_{m_0}, qui est une application linéaire $\mathbf{R}^2 \to E$. Une bonne façon d'assurer que l'image d'un voisinage de m_0 ressemble à un petit morceau de plan est de demander que df_{m_0} soit injective.

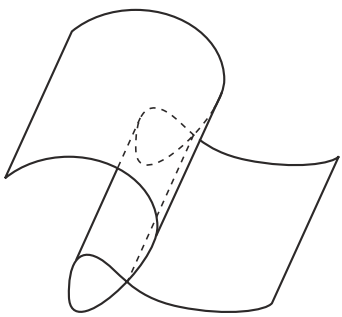


Figure 5

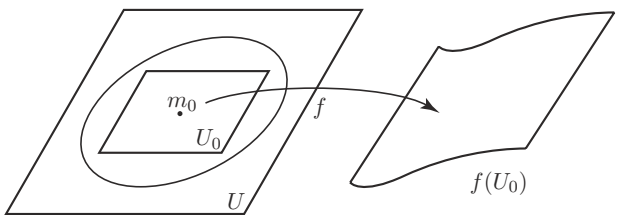


Figure 6

Définition IX.2.2. Une nappe géométrique Σ définie par un paramétrage $f : U \to \mathcal{E}$ est dite *régulière* si la différentielle de f en chaque point de U est de rang 2.

Remarque IX.2.3. Il est facile, mais important, de vérifier qu'il s'agit bien d'une propriété de la nappe *géométrique* Σ et pas du paramétrage f particulier choisi. En effet, si $g : V \to \mathcal{E}$ est un paramétrage équivalent à f par un difféomorphisme $\varphi : V \to U$, on calcule en un point quelconque $n = \varphi^{-1}(m) \in V$

$$dg_n = df_{\varphi(n)} \circ d\varphi_n = df_m \circ d\varphi_n.$$

Mais φ est un difféomorphisme, donc $d\varphi_n$ est un isomorphisme linéaire $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Ainsi le rang de dg_n est le même que celui de df_m. □

Notation

Pour faciliter la lecture, j'ai utilisé systématiquement la lettre m avec les coordonnées (u, v) pour les points de $\mathbf{R}^2$ et la lettre p avec les coordonnées (x, y, z) pour les points de $\mathbf{R}^3$.

Exemple IX.2.4. Considérons le cône de révolution paramétré par l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (\theta, z) & \longmapsto & (kz\cos\theta, kz\sin\theta, z). \end{array}$$

On s'attend, si la définition est bonne, à ce que la nappe soit régulière, sauf au sommet du cône. Et en effet, la matrice de la différentielle est

$$df_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -kz\sin\theta & k\cos\theta \\ kz\cos\theta & k\sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est de rang 2 tant que le premier vecteur colonne n'est pas nul, c'est-à-dire pour $z \neq 0$. Le point $(0,0,0)$, le sommet du cône, est un point *singulier*.

Remarque IX.2.5. Comme on vient de le voir sur cet exemple, pour que f soit de rang 2 au point (u,v) de U, il faut et il suffit que les deux vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

soient indépendants.

Points singuliers

L'essentiel de ce chapitre est consacré aux propriétés des nappes *régulières*. Il ne faudrait pas en déduire que les points singuliers ne sont pas dignes d'intérêt. Ils apparaissent naturellement dans de nombreuses situations (penser au cas des courbes, où le principe de Huygens affirme que certaines courbes doivent avoir des points singuliers). Ils peuvent être isolés (comme dans l'exemple du cône) ou non. On les verra s'organiser en courbes par exemple sur la surface « discriminant des polynômes de degré 4 », la *queue d'aronde*, dans l'exercice IX.9.

Paramétrages cartésiens

Certains des exemples que nous avons rencontrés avaient des équations de la forme $z = h(x,y)$ (par exemple la selle de cheval avec $h(x,y) = xy$). On peut considérer une telle équation comme décrivant une nappe paramétrée par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, y, h(x,y)). \end{array}$$

On remarquera qu'un tel paramétrage est *toujours* de rang 2. Les paramétrages *cartésiens* sont évidemment injectifs. Ils ont une autre propriété remarquable : le sous-espace $df_m(\mathbf{R}^2)$, engendré par $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne contient jamais l'axe des z. Il y a une réciproque à ces remarques, exprimée dans le théorème suivant.

Théorème IX.2.6. *Soit Σ une nappe de classe $\mathcal{C}^k$ définie par un paramétrage $f : U \to \mathbf{R}^3$ et soit m_0 un point de U tel que df_{m_0} soit de rang 2. Alors il existe un voisinage U_0 de m_0 dans U et un système de coordonnées dans $\mathbf{R}^3$ tels que la nappe paramétrée par la restriction $f|_{U_0}$ admette un paramétrage cartésien dans ces coordonnées.*

Avant de démontrer ce théorème, il n'est pas inutile de faire quelques remarques expliquant divers aspects de l'énoncé.

Remarques IX.2.7

(1) En particulier, la restriction $f|_{U_0}$ aura une différentielle de rang 2 en tout point (on sait que c'est une condition ouverte et donc que c'est vrai sur tout un voisinage de m_0).

(2) En particulier aussi, $f|_{U_0}$ sera injective. Considérons un exemple. Soit C une courbe plane régulière avec un point double, paramétrée par $g : t \mapsto (x(t), y(t))$, et soit S le cylindre paramétré par $f : (t, u) \mapsto (x(t), y(t), u)$.

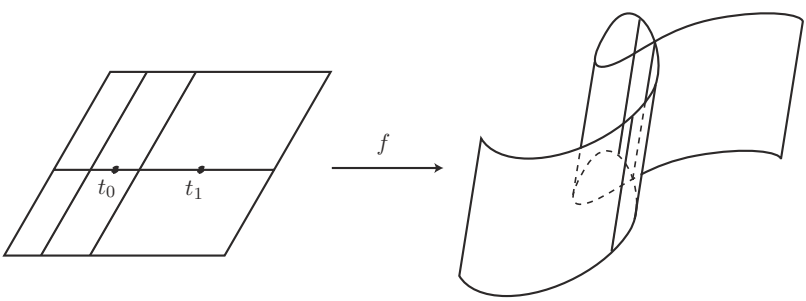


Figure 7

Comme C est régulière, la nappe S l'est aussi (vérification immédiate) et pourtant f n'est pas injective. Soient t_0 et t_1 les valeurs de t paramétrant le point double de C. Il y a un voisinage I_0 de t_0 tel que $g|_{I_0}$ soit injectif et de même $f|_{I_0 \times \mathbf{R}}$ (figure 7). Le théorème donne une propriété d'injectivité locale en ce sens.

(3) Même si f est partout de rang 2 et injective, il se peut fort bien que la nappe géométrique qu'elle définit n'ait pas de paramétrage cartésien global. En effet, dans des coordonnées (x, y, z) où une surface est définie par un paramétrage cartésien, elle est le graphe d'une fonction, et en particulier son intersection avec une droite parallèle à l'axe des z contient au plus un point, et la projection de la surface sur le plan des (x, y) est injective.

Voici un exemple. L'application f définie sur l'ouvert $]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $\mathbf{R}^2$ par $f(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$ paramètre (une partie de) la sphère

unité. Elle est partout de rang 2 et elle est injective. Pourtant, il n'existe aucun plan de $\mathbf{R}^3$ tel que la projection de S sur ce plan soit injective. La sphère ne peut être décrite *globalement* par un paramétrage cartésien.

Démonstration du théorème IX.2.6. Soit $f : U \to \mathbf{R}^3$ un paramétrage de Σ. On l'écrit sous la forme $(u, v) \longmapsto (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))$. La matrice de la différentielle df_{m_0} au point $m_0 = (u_0, v_0)$, de rang 2 par hypothèse, est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \beta}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Quitte à permuter les coordonnées dans $\mathbf{R}^3$, on peut supposer que le mineur

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial \beta}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, c'est-à-dire que le sous-espace $df_{m_0}(\mathbf{R}^2)$, engendré par les deux vecteurs $\partial f/\partial u$ et $\partial f/\partial v$ ne contient pas l'axe des z (voir la figure 8, on verra plus bas que le plan $df_{m_0}(\mathbf{R}^2)$ est le plan tangent, comme la figure le suggère).

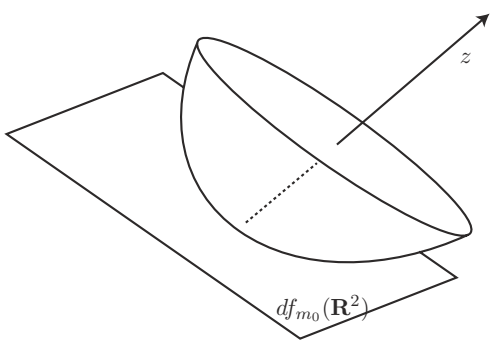


Figure 8

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} g : & U & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (\alpha(u, v), \beta(u, v)). \end{array}$$

Elle est de rang 2 en (u_0, v_0) et le théorème d'inversion locale nous dit que c'est un difféomorphisme local[(1)], c'est-à-dire qu'il existe un voisinage U_0 de (u_0, v_0) dans U tel que $h = g|_{U_0} : U_0 \to \mathbf{R}^2$ soit un difféomorphisme sur son image W. Maintenant, la composition $f \circ h^{-1}$ envoie (x, y) sur $(x, y, \gamma \circ h^{-1}(x, y))$:

$$(x, y) \xmapsto{h^{-1}} (u, v) \xmapsto{f} (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) = (x, y, \gamma \circ h^{-1}(u, v))$$

(où $x = \alpha(u, v)$, $y = \beta(u, v)$). C'est donc bien un paramétrage cartésien de la nappe paramétrée par $f|_{U_0}$. □

Surface définie par une équation

Il arrive souvent qu'une surface soit définie par une équation, comme la sphère unité, par exemple, qui est constituée des points vérifiant

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

On donne plus généralement une fonction

$$F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$$

et la « surface » (géométrique) Σ est

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\right\}.$$

Avec une hypothèse convenable, il s'agit bien d'une surface, comme l'affirme la proposition suivante.

Proposition IX.2.8. *Soit $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point tel qu'on ait $F(p_0) = 0$ et tel que l'application linéaire*

$$(dF)_{p_0} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$$

soit surjective. Alors il existe un paramétrage qui fait d'un voisinage de p_0 dans

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$$

une nappe régulière.

Démonstration. Il s'agit d'une simple reformulation du théorème des fonctions implicites. Avec l'hypothèse que l'application $(dF)_{p_0}$ est surjective, une au moins des dérivées partielles de F n'est pas nulle en p_0. Quitte à changer le nom des coordonnées, on peut supposer que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \neq 0.$$

(1) Voir par exemple **[12]** pour cette variante du théorème des fonctions implicites.

Alors, l'équation $F(x, y, z) = 0$ se résout au voisinage de p_0 : il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur U tels que l'on ait l'équivalence

$$((x, y) \in U \text{ et } F(x, y, z) = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad z = \varphi(x, y).$$

On a ainsi obtenu un paramétrage cartésien et donc régulier de la « surface » Σ au voisinage de p_0. □

Remarque IX.2.9. Les différentes façons de décrire une surface envisagées ici, paramétrage régulier, graphe, équation, et leur équivalence, sont un cas particulier (particulier seulement par la dimension) du théorème dit des sous-variétés. Voir [**44**].

Plans tangents

Le plan $df_m(\mathbf{R}^2)$ image de la différentielle d'un paramétrage a joué un rôle assez important dans la démonstration du théorème IX.2.6. On a vu aussi que ce plan ne dépendait pas du paramétrage régulier choisi. Si f paramètre une nappe régulière Σ et si $p = f(m)$, on a envie de *définir* le plan tangent à Σ en p par

$$T_p\Sigma = df_m(\mathbf{R}^2).$$

Il est sûr que, grâce à la régularité, $df_m(\mathbf{R}^2)$ est bien un plan de $\mathbf{R}^3$. Il pourrait dépendre de m si f n'était pas injective : si $p = f(m_1) = f(m_2)$ (comme par exemple sur la figure 7), on ne sait pas trop lequel des deux plans choisir. Quand f est injective, on définit donc le plan tangent à Σ en p par cette formule.

Remarque IX.2.10. On n'a pas défini ici de plan tangent pour un paramétrage non injectif. Pourtant, sur la figure 7, si on voit bien qu'il n'y a pas *un* plan tangent en un point double, on n'a aucun mal à en imaginer deux.

En un point p_0 *singulier*, c'est-à-dire image d'un point m_0 tel que la différentielle $(df)_{m_0}$ n'est *pas* injective, la situation est bien plus dramatique. Il se peut même que les plans tangents $T_p\Sigma$ en les points réguliers voisins n'aient aucune limite en p_0. Voir l'exercice IX.10.

On démontre simplement, dans le cas où la surface est définie par une équation $F(x, y, z) = 0$:

Proposition IX.2.11. *Soit $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit p_0 un point tel que l'on ait $F(p_0) = 0$ et que $(dF)_{p_0}$ soit surjective. Alors le plan tangent en p_0 à la surface définie par l'équation $F(p) = 0$ au voisinage de p_0 est le noyau de la différentielle $(dF)_{p_0}$.*

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition IX.2.8. Le plan tangent en p_0 est engendré par les dérivées partielles en p_0 du paramétrage

$$(x, y) \longmapsto (x, y, \varphi(x, y)).$$

On a, bien sûr

$$(dF)_{p_0}\left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

et

$$(dF)_{p_0}\left(0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Grâce à l'expression des dérivées partielles de φ par le théorème des fonctions implicites, ces deux vecteurs sont dans le noyau de $(dF)_{p_0}$. Celui-ci étant de dimension 2, ça suffit. □

Remarques IX.2.12

(1) Tel qu'on l'a défini, $T_p\Sigma$ est un plan *vectoriel* de $\mathbf{R}^3$. On le considère souvent comme un plan affine en mettant son origine en p.

(2) Il ne dépend pas du paramétrage f choisi : si $g = f \circ \varphi$ et $m = \varphi(n)$, $dg_n = df_m \circ d\varphi_n$ donc dg_n et df_m ont la même image, comme les lecteurs l'ont certainement déjà remarqué.

(3) C'est le sous-espace engendré par les vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(m)$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(m)$.

Exemples IX.2.13

– Le plan tangent en un point à une surface de révolution est engendré par les vecteurs tangents au méridien et au parallèle passant par ce point (exercice IX.7).

– Le plan tangent en un point à une surface réglée contient la génératrice passant par ce point (exercice IX.8).

Tangentes aux courbes tracées sur une surface

Considérons une surface Σ paramétrée par une application injective

$$f : U \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

et une courbe Γ de U avec son image $f(\Gamma) \subset \Sigma$. Si $t \mapsto \gamma(t)$ est un paramétrage de Γ dans U, la courbe $f(\Gamma)$ est paramétrée par $f \circ \gamma$ et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

Le vecteur tangent à $f(\Gamma)$ en $f \circ \gamma(t)$ est l'image par $df_{\gamma(t)}$ d'un vecteur $\gamma'(t)$ de $\mathbf{R}^2$. En particulier, c'est un vecteur du plan tangent à Σ en $f \circ \gamma(t)$.

La tangente à une courbe tracée sur Σ est donc dans le plan tangent. Réciproquement, si Δ est une droite de $T_{p_0}\Sigma$, appelons X un de ses vecteurs directeurs et écrivons-le dans la base $\partial f/\partial u, \partial f/\partial v$ de ce plan :

$$X = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Considérons l'intersection δ de la droite de vecteur directeur (λ, μ) passant par (u_0, v_0) avec U : c'est une courbe paramétrée dont la tangente en (u_0, v_0) est engendrée par (λ, μ). On a alors

$$df_{(u_0,v_0)}(\lambda, \mu) = X,$$

de sorte que la droite Δ est la tangente à l'image de δ, un arc tracé sur Σ.

On peut donc considérer le plan tangent en p_0 comme l'unique plan contenant les tangentes en p_0 à toutes les courbes tracées sur Σ.

Exemple IX.2.14. Une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t)$ est dessinée sur la sphère unité si et seulement si le vecteur $\gamma(t)$ est unitaire pour tout t :

$$\|\gamma(t)\|^2 = 1 \text{ pour tout } t.$$

En dérivant cette relation par rapport à t, on voit que $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\gamma(t)$ pour tout t. On vérifie ainsi que l'espace tangent à la sphère unité en p est le plan $p^\perp$. On considérera, comme on l'a dit, le plan affine passant par p et orthogonal à p comme le plan tangent à la sphère en p.

Application tangente

Considérons maintenant une application h définie sur le support de la nappe Σ de classe $\mathcal{C}^k$ et à valeurs dans un espace $\mathbf{R}^n$. On dit que h est *différentiable* si, pour un paramétrage $f : U \to \mathbf{R}^3$ de Σ, l'application

$$h \circ f : U \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

brave application d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^n$, l'est. Cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisi (la vérification immédiate, mais nécessaire, est laissée aux lectrices). On définit de façon analogue les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

De même que l'application différentiable $h \circ f$ a une *différentielle* en tout point de U, il y a une application linéaire associée à h, son *application tangente*, en tout point de Σ. C'est une application linéaire

$$T_p h : T_p\Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

que l'on peut noter aussi dh_p et dont voici la définition.

Si $f : U \to \mathbf{R}^3$ est un paramétrage d'une nappe *régulière* Σ avec $f(u,v) = p$, tout vecteur X de $T_p\Sigma$ est l'image par $df_{(u,v)}$ d'un unique vecteur ξ de $\mathbf{R}^2$. On pose

$$T_p h(X) = d(h \circ f)_{(u,v)}(\xi)$$

(l'application $h \circ f$, toujours aussi brave, a une différentielle $d(h \circ f)$ en tout point de U).

Pour que la définition donnée ait un sens, il faut encore que le résultat ne dépende pas du choix du paramétrage. Considérons donc un autre paramétrage $g : V \to \mathbf{R}^3$. Appelons $\varphi : V \to U$ le changement de paramétrage, qui vérifie $g = f \circ \varphi$. Notons $(u,v) = \varphi(s,t)$. Soient p un point de la nappe Σ et ξ, η des vecteurs de $\mathbf{R}^2$ tels que

- le point p vérifie $p = g(s,t) = f(u,v)$
- les vecteurs ξ et η sont reliés par l'égalité $\xi = d\varphi_{(s,t)}(\eta)$.

Soit X le vecteur de $\mathbf{R}^3$ tangent à Σ défini par $X = dg_{(s,t)}(\eta) = df_{(u,v)}(\xi)$. On calcule :

$$\begin{aligned} d(h \circ g)_{(s,t)}(\eta) &= d((h \circ f) \circ \varphi)_{(s,t)}(\eta) \\ &= d(h \circ f)_{\varphi(s,t)}\left(d\varphi_{(s,t)}(\eta)\right) \\ &= d(h \circ f)_{(u,v)}(\xi). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $T_p h(X)$ ne dépend pas du choix du paramétrage de Σ choisi.

Exemple IX.2.15. Si Σ est une surface dans $\mathbf{R}^3$ et si $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est une fonction, l'application tangente à la restriction de h à Σ est la restriction de la différentielle de h, en formules :

$$T_p\left(h|_\Sigma\right) = (dh)_p|_{T_p\Sigma}.$$

Intersection de deux surfaces

Si elles ne sont pas tangentes[(2)], deux surfaces se rencontrent le long d'une courbe (figure 9). C'est ce qu'affirme l'énoncé suivant, qui précise aussi les relations entre les espaces tangents des surfaces et de la courbe.

Proposition IX.2.16. *Soient Σ_1 et Σ_2 deux nappes régulières de classe $\mathcal{C}^1$ à paramétrage injectif et soit p un point de l'intersection $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. On suppose que les plans tangents $T_p\Sigma_1$ et $T_p\Sigma_2$ en p sont distincts. Alors, au voisinage de p, l'intersection $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est une courbe dont la tangente en p est l'intersection $T_p\Sigma_1 \cap T_p\Sigma_2$ des deux plans tangents.*

[(2)] C'est une hypothèse de « position générale ».

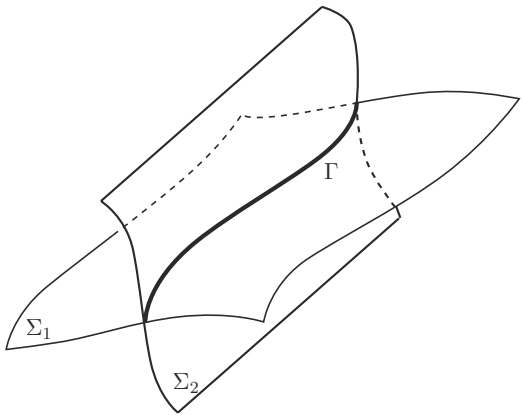


Figure 9

Démonstration. On choisit un repère d'origine p dont le troisième vecteur n'est parallèle à aucun des deux plans tangents, de sorte que les deux nappes aient, au voisinage de p, des paramétrages cartésiens :

$$z = f_1(x, y) \text{ pour } \Sigma_1 \text{ et } z = f_2(x, y) \text{ pour } \Sigma_2,$$

pour deux fonctions f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un voisinage de $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$ et telles que $f_i(0, 0) = 0$.

L'intersection $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est donc l'image de

$$\{(x, y) \subset U \mid f_1(x, y) = f_2(x, y)\}$$

par l'un ou l'autre des paramétrages cartésiens.

Considérons donc la fonction $f = f_1 - f_2$ et calculons ses dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) - \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) - \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0). \end{cases}$$

Si les deux dérivées partielles étaient nulles, on aurait $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc au moins l'une des deux n'est pas nulle et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites[(3)] pour trouver des intervalles ouverts I et J contenant 0 et tels que

$$\{(x, y) \in I \times J \mid f(x, y) = 0\}$$

[(3)] Voir par exemple [**12, 44**] pour ce théorème et ses variantes.

soit une courbe simple et régulière de classe $\mathcal{C}^1$. La restriction de chaque f_i à $I \times J$ définit une sous-nappe de Σ_i contenant p. La partie de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ concernée est l'image Γ de cette courbe.

La courbe Γ est tracée sur chacune des deux surfaces Σ_1 et Σ_2, donc sa tangente en p est contenue dans les plans tangents $T_p\Sigma_1$ et $T_p\Sigma_2$. Comme ces deux plans se coupent le long d'une droite, la tangente à Γ en p est bien l'intersection des plans tangents. □

Remarque IX.2.17. On utilisera, au § IX.3, le cas où l'une des surfaces est un plan.

Position d'une surface par rapport à son plan tangent

On a d'abord une propriété de contact, comme pour la tangente à une courbe, qui approche la courbe à l'ordre 1.

Proposition IX.2.18. *Soit Σ une nappe régulière définie par un paramétrage injectif $f : U \to \mathbf{R}^3$ et soit $p_0 = f(m_0)$ un point de Σ. Le plan affine $\mathcal{P}$ défini par l'équation $\varphi(p) = 0$ est le plan tangent à Σ en p_0 si et seulement si au voisinage de m_0, on a*

$$\varphi(f(m)) = o(\|\overrightarrow{m_0m}\|).$$

En d'autres termes, les points de Σ vérifient « presque » l'équation de $\mathcal{P}$.

Démonstration. On écrit que $\varphi \circ f$ est différentiable en m_0 :

$$\varphi \circ f(m) = \varphi \circ f(m_0) + d(\varphi \circ f)_{m_0} \cdot \overrightarrow{m_0m} + o(\|\overrightarrow{m_0m}\|).$$

La relation de l'énoncé est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi \circ f(m_0) = 0 \\ \text{et} \\ d(\varphi \circ f)_{m_0} \cdot \overrightarrow{m_0m} = 0 \text{ pour tout } m. \end{cases}$$

La première relation dit simplement que $\varphi(p_0) = 0$, c'est-à-dire que le plan $\mathcal{P}$ contient p_0. La deuxième dit que $d(\varphi \circ f)_{m_0} = 0$, c'est-à-dire que $d\varphi_{p_0} \circ df_{m_0} = 0$. Comme φ est affine, l'application $(d\varphi)_{p_0}$ est sa partie linéaire, appelons-la $L(\varphi)$. Notre relation dit que $L(\varphi) \circ df_{m_0} = 0$, soit que le plan vectoriel image de df_{m_0} est le noyau de $L(\varphi)$, le plan vectoriel dirigeant $\mathcal{P}$.

La relation de l'énoncé est donc bien équivalente au fait que $\mathcal{P}$ est le plan parallèle à $T_{p_0}\Sigma$ passant par p_0. □

On va maintenant considérer la situation à l'ordre 2. En particulier, il faudra supposer que les paramétrages sont de classe $\mathcal{C}^2$. Au voisinage de p_0, on peut supposer que Σ est définie par un paramétrage cartésien $z = f(x, y)$. On peut

bien sûr supposer que l'origine a été choisie en p_0, c'est-à-dire que $f(0,0) = 0$. Utilisons maintenant les notations traditionnelles dites de Monge

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

pour les dérivées premières, de sorte que l'équation du plan tangent en 0 est $z = px + qy$, et

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

pour les dérivées secondes, de sorte que la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit

$$f(x,y) = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2).$$

Le terme quadratique représente la différence (à l'ordre 2) entre un point $(x, y, f(x,y))$ de la surface et le point correspondant $(x, y, \varphi(x,y))$ du plan tangent. La position de la surface par rapport à son plan tangent est décrite à l'aide de la forme quadratique dérivée seconde de f en 0 :

$$Q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2,$$

et la surface reste ou non du même côté de son plan tangent (au voisinage de 0) selon que $f(x,y) - px - qy$ garde ou non un signe constant, c'est-à-dire selon que la forme Q est ou n'est pas définie.

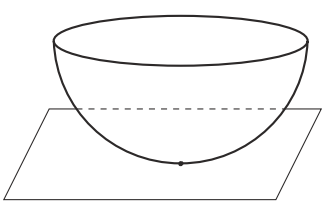


Figure 10

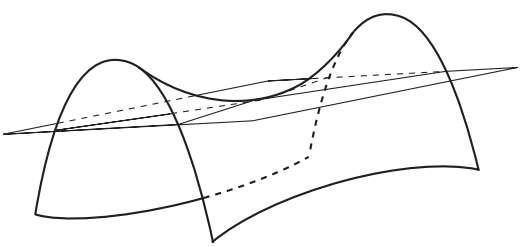


Figure 11

(1) Si Q est définie (positive ou négative), c'est-à-dire si $s^2 - rt < 0$, alors la fonction $f(x,y) - px - qy$ admet un extremum strict en 0, la surface reste du même côté de son plan tangent. Le point p_0 est dit *elliptique* (figure 10).

(2) Si Q est non dégénérée mais change de signe, c'est-à-dire si $s^2 - rt > 0$, il y a des points de la surface arbitrairement proches de 0 de chaque côté du plan tangent, le point p_0 est dit *hyperbolique* (figure 11).

(3) Si Q est dégénérée mais pas nulle, c'est-à-dire si $s^2 - rt = 0$ mais r, s et t ne sont pas tous nuls, on peut supposer que $Q(x, y) = \alpha x^2$, son graphe est un cylindre parabolique. La surface contient des points arbitrairement proches de 0 et du même côté du plan tangent que ce graphe, mais elle peut très bien en contenir qui soient de l'autre côté (voir l'exercice IX.11). Le point p_0 est dit *parabolique*.

(4) Si Q est nulle ($r = s = t = 0$), on peut avoir à peu près n'importe quoi (voir des exemples dans l'exercice IX.11). Le point p_0 est dit *planaire*.

On interprétera cette position en termes de courbure au § IX.3 (corollaire IX.3.8).

IX.3. Propriétés métriques des surfaces

Dans ce paragraphe, je vais faire une introduction aux propriétés métriques locales des surfaces de l'espace euclidien de dimension 3 qui est fortement inspirée de la présentation historique des chapitres 2 et 3 du deuxième tome de [**51**]. L'idée est de formaliser par exemple le fait qu'une sphère est « plus courbe » qu'un plan.

Toutes les surfaces dont il est question dans cette partie sont de classe $\mathcal{C}^2$, et même $\mathcal{C}^3$ pour le théorème IX.3.10.

Courbure des courbes sur les surfaces et théorème d'Euler

Historiquement, on a commencé à aborder les propriétés métriques des surfaces en considérant celles des courbes qu'elles contiennent. Un des résultats de cette préhistoire des surfaces est dû à Euler (1760). On considère un point p de Σ, la normale au plan tangent en p, un vecteur directeur (vecteur normal) $n(p)$ de cette normale et un plan P arbitraire contenant $n(p)$. Pour définir un tel plan, il est équivalent de donner une droite tangente à la surface, par exemple par un vecteur tangent X (figure 12).

Fixons donc un vecteur unitaire $X \in T_p\Sigma$. Soit P_X le plan (passant par p) engendré par X et $n(p)$. En vertu de la proposition IX.2.16, l'intersection de P_X avec Σ est une courbe tracée sur Σ à laquelle le vecteur X est tangent. Et, bien évidemment, c'est une courbe plane. En particulier, comme le plan P_X peut être orienté par $(X, n(p))$, elle a une courbure algébrique[(4)], notée K_X.

On a ainsi une application $X \mapsto K_X$ qui associe, à tout vecteur unitaire tangent à Σ, un nombre réel. Remarquons que l'on a

$$K_{-X} = K_X$$

[(4)] Voir au besoin le § VIII.2.

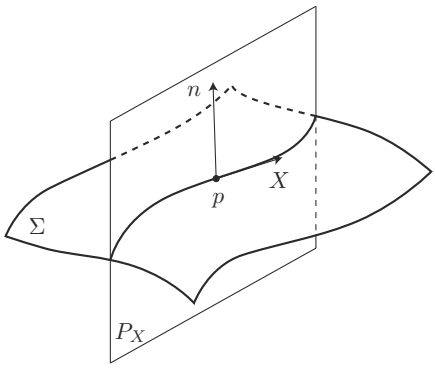


Figure 12

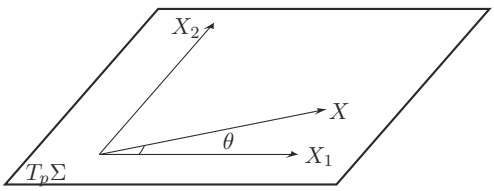


Figure 13

(le paramétrage de la courbe a changé, mais l'orientation du plan P_X aussi).

***Théorème IX.3.1* (Euler).** *Si tous les K_X ne sont pas égaux, il existe une unique direction, représentée par un vecteur X_1, pour laquelle K_X est minimale et une seule, représentée par X_2, pour laquelle elle est maximale. Les vecteurs X_1 et X_2 sont orthogonaux, et, si X fait un angle θ avec X_1, on a*

$$K_X = K_{X_1} \cos^2 \theta + K_{X_2} \sin^2 \theta.$$

La démonstration de ce théorème attendra la page 336. Son énoncé rappelle l'existence d'axes orthogonaux pour les coniques à centre : il a un fort parfum d'« orthogonalisation simultanée[5] » ... sauf qu'il n'y a pas de forme quadratique à orthogonaliser ici ! Attendons donc d'avoir une forme quadratique, un des outils que va nous donner Gauss.

Car c'est avec Gauss et son article *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[6] que la vraie histoire des surfaces a commencé. La grande nouveauté de ce travail était de considérer les surfaces elles-mêmes, pas leurs courbes, et le grand outil est le *vecteur normal*[7], considéré comme une application de la surface dans la sphère unité, l'*application de Gauss*.

Application de Gauss

On considère une nappe régulière Σ paramétrée par une application f d'un ouvert U dans $\mathbf{R}^3$ et un point $p = f(m)$ de Σ. On veut appeler $n(p)$ le vecteur

[5] C'est-à-dire du théorème VII.7.8.

[6] Dans ce livre, les citations latines sont traduites, il s'agit de *Recherches générales sur les surfaces courbes*.

[7] On dit que ce sont les pratiques d'astronome de Gauss qui sont à l'origine de cette idée.

unitaire normal, mais il y a un choix à faire (la normale, a, comme toutes les droites réelles, deux vecteurs unitaires) et on aura besoin de le faire de façon continue en p. On peut le faire par exemple en choisissant $n(p)$ de même sens que le vecteur normal

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Cette définition de n est aussi une façon de le calculer. De façon plus intrinsèque : le plan $\mathbf{R}^2$ est orienté par sa base canonique, la différentielle $(df)_m$ envoie cette orientation sur une orientation du plan tangent, et, comme l'espace $\mathbf{R}^3$ est orienté, on en déduit une orientation de la droite normale. On peut alors considérer n comme une application de Σ (ou, mieux, de U) dans la sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$.

Par exemple, si Σ est la sphère unité elle-même, le plan tangent $T_p\Sigma$ est le plan $p^\perp$, la normale est dirigée par p et on peut choisir $n(p) = p$, c'est-à-dire $n = \mathrm{Id}$.

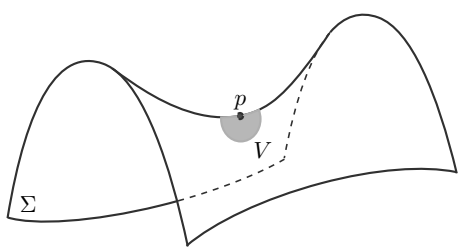


Figure 14

L'idée heuristique qui sous-tend la définition de la courbure qui va suivre est assez simple. On considère un petit voisinage V de p dans Σ (figure 14), son aire orientée $\mathcal{A}(V)$ et l'aire de l'image $\mathcal{A}(n(V))$. On tente de donner un sens à l'expression

$$K(p) = \text{« } \lim_{V \to p} \frac{\mathcal{A}(n(V))}{\mathcal{A}(V)} \text{ »}.$$

Cette idée est justifiée par les exemples simples où

– la surface Σ est un plan, n est constante et cette formule donnerait $K \equiv 0$,

– la surface Σ est la sphère unité, n est l'application identique et cette formule donnerait $K \equiv 1$,

– la surface Σ est le col représenté sur la figure 14 et où l'aire est strictement négative.

Dans cette formule heuristique, rien n'est vraiment bien défini. Faisons donc un détour, pour pouvoir définir la courbure de Gauss. Pour pouvoir, infinitésimalement, calculer des aires sur une surface, on utilise la métrique euclidienne de l'espace $\mathbf{R}^3$.

Courbure de Gauss

On choisit une base orthonormée (v_p, w_p) de $T_p\Sigma$. L'application tangente à n en p envoie v_p et w_p sur deux vecteurs v'_p et w'_p de $T_{n(p)}S^2$. On *définit* $K(p)$ comme l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs v'_p et w'_p. La figure 15 représente, à gauche le plan tangent $T_p\Sigma$ avec sa base orthonormée, à droite le plan (parallèle) $T_{n(p)}S^2$ et l'image par l'application tangente T_pn de la base orthonormée.

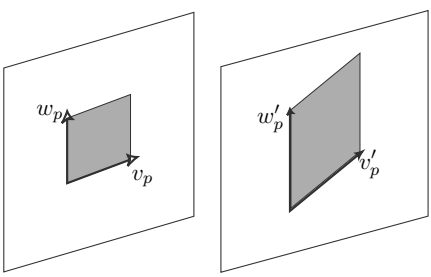


Figure 15

Remarques IX.3.2

– On a utilisé ici l'application tangente à $n : \Sigma \to \mathbf{R}^3$, en remarquant que, comme n est à valeurs dans la sphère unité (c'est-à-dire comme $\|n(p)\|^2 = 1$ pour tout p), on a $T_pn(X)\cdot n(p) = 0$ pour tout vecteur X de $T_p\Sigma$ donc T_pn est à valeurs dans l'espace tangent à la sphère.

– Les plans tangents $T_p\Sigma$ et $T_{n(p)}S^2$ sont les mêmes ! En effet, chacun d'eux est, à sa façon, l'orthogonal de $n(p)$. On peut donc considérer l'application linéaire T_pn tangente à n, qui envoie $T_p\Sigma$ dans $T_{n(p)}S^2$ comme un endomorphisme de $T_p\Sigma$. La courbure de Gauss $K(p)$ est simplement son déterminant.

La deuxième forme fondamentale

Pour rendre les formules plus faciles à lire, je vais noter $\langle X, Y\rangle = X\cdot Y$ le produit scalaire euclidien. On définit, pour tout point p de Σ, et pour tous vecteurs X, Y dans $T_p\Sigma$

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = -\langle T_pn(X), Y\rangle.$$

On va voir (remarque IX.3.5) que cette formule « mystérieuse » est faite pour que $\mathrm{II}_p(X, X)$ soit la courbure K_X de la courbe définie par le vecteur tangent X.

Remarque IX.3.3. La notation II est à la fois traditionnelle et détestable. Le symbole II est le chiffre romain désignant le nombre 2. La forme bilinéaire ainsi définie est la *deuxième forme fondamentale* de la surface Σ au point p. Les lecteurs sont en droit de se demander s'il y a une *première* forme fondamentale. La réponse est, évidemment, oui. La première forme fondamentale de Σ en p est tout simplement la restriction du produit scalaire euclidien à $T_p\Sigma$. On aurait pu écrire

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = -\mathrm{I}_p(T_p n(X), Y),$$

mais on ne l'a pas fait...

La propriété essentielle de la forme bilinéaire II_p est qu'elle est *symétrique*. Ce n'est pas tout à fait évident. Voici l'ingrédient principal de la démonstration de ce fait.

Proposition IX.3.4. *Soit γ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et tracée sur Σ. Soit $X = \gamma'(0) \in T_p\Sigma$ son vecteur tangent en p. Alors*

$$\langle \gamma''(0), n(p) \rangle = \mathrm{II}_p(X, X).$$

Remarque IX.3.5. En particulier, par définition de la courbure d'une courbe plane, $\mathrm{II}_p(X, X)$ est la courbure K_X de la courbe découpée par le plan engendré par $n(p)$ et X sur la surface Σ, précisément celle qui apparaissait dans le théorème d'Euler (théorème IX.3.1).

Démonstration. On dérive $n \circ \gamma$ en 0 :

$$\frac{d}{ds} n \circ \gamma|_{s=0} = T_p n(\gamma'(0)) = T_p n(X).$$

De plus, le produit scalaire $\langle \gamma'(s), n(\gamma(s)) \rangle$ est identiquement nul. Sa dérivée par rapport à s aussi

$$\langle \gamma''(s), n \circ \gamma(s) \rangle + \langle \gamma'(s), \frac{d}{ds}(n \circ \gamma)(s) \rangle = 0,$$

ce qui, en $s = 0$, donne

$$\langle \gamma''(0), n(p) \rangle = -\langle X, T_p n(X) \rangle = \mathrm{II}_p(X, X),$$

ce que nous voulions démontrer. □

Théorème IX.3.6. *La forme bilinéaire II_p est symétrique.*

Démonstration. Pour le confort de celles des lectrices qui seraient mal à l'aise avec les dérivations, je vais faire la démonstration en coordonnées, c'est-à-dire à partir d'un paramétrage de la surface. On paramètre donc Σ par $f : U \to \mathbf{R}^3$. On note

$$N = n \circ f : U \longrightarrow S^2.$$

Dans ce cadre, il s'agit de montrer l'égalité

$$\mathrm{II}_p\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \mathrm{II}_p\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}\right).$$

On a

$$T_p n\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = T_p n\left(df\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial u}(n \circ f) = \frac{\partial N}{\partial u}.$$

Mais bien sûr, comme N est un vecteur normal, on a aussi

$$\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle = 0,$$

ce qui, en dérivant par rapport à u, donne l'égalité

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right\rangle = 0.$$

On en déduit les égalités

$$\left\langle N, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle = -\left\langle T_p n\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right), \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle = \mathrm{II}_p\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Or, le membre de gauche est symétrique en u et v parce que f est de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui montre que la forme bilinéaire II_p est bien symétrique. □

À partir de là, le théorème d'Euler est, comme prévu, une application de l'orthogonalisation simultanée des formes quadratiques.

Démonstration du théorème IX.3.1. Il existe une base orthonormée (X_1, X_2) du plan tangent $T_p\Sigma$ dans laquelle la deuxième forme fondamentale II_p est diagonalisée.

Pour chacun des vecteurs X_i, la courbure K_{X_i} vaut

$$K_{X_i} = \mathrm{II}_p(X_i, X_i)$$

grâce à la proposition IX.3.4. Comme ces deux vecteurs forment une base orthogonale pour la deuxième forme fondamentale, on a

$$\mathrm{II}_p((\cos\theta)X_1 + (\sin\theta)X_2) = K_{X_1}\cos^2\theta + K_{X_2}\sin^2\theta.$$

Remarquons aussi que, si K_{X_1} et K_{X_2} sont distinctes, c'est-à-dire si II_p n'est pas proportionnelle au produit scalaire euclidien, elles sont effectivement les extrema de la fonction K_X. □

Exemples IX.3.7

– Dans le cas de la sphère unité, avec le choix d'orientation tel que $n = \mathrm{Id}$, donc $\mathrm{II}(X, X) = -\|X\|^2$, la courbure K_X est identiquement égale à -1 et la courbure de Gauss $K(p)$ identiquement égale à 1.

– Dans le cas d'un plan, n est constante donc $T_p n = 0$ et la forme II est identiquement nulle. La courbure K_X est identiquement nulle.

– Dans le cas d'un cône ou d'un cylindre, l'application $T_p n$ n'est pas nulle mais la forme quadratique II_p est dégénérée et la courbure K_X est identiquement nulle (exercice IX.15).

Les directions de X_1 et X_2 sont appelées *directions de courbure principales* au point p considéré. Les courbures K_{X_1} et K_{X_2} sont les *courbures principales*. Comme la courbure de Gauss en p est le déterminant de $T_p n$, on voit en calculant dans la base (X_1, X_2) qu'elle est le produit des courbures principales.

Voici une application : la courbure en p est liée à la position locale de la surface par rapport au plan tangent en p.

Corollaire IX.3.8. *Le point p est elliptique si et seulement si $K(p) > 0$, hyperbolique si et seulement si $K(p) < 0$.*

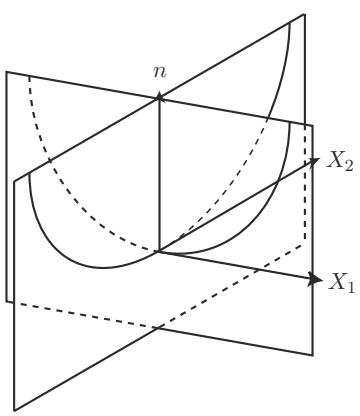


Figure 16

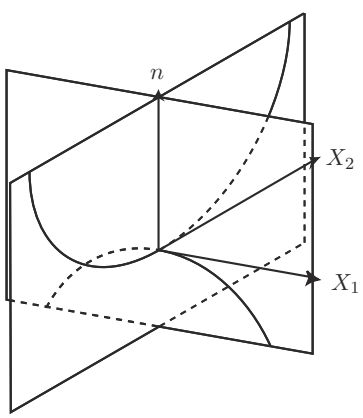


Figure 17

Démonstration. La courbure $K(p)$ est strictement positive si et seulement si la deuxième forme fondamentale est définie, c'est-à-dire si et seulement si la courbure K_X est de signe constant. Ceci est équivalent à dire que toutes les courbes $P_X \cap \Sigma$ sont situées (localement et strictement) du même côté de $T_p\Sigma$ (voir les remarques VIII.2.3 et la figure 16).

De même, $K(p)$ est strictement négative si et seulement si K_{X_1} et K_{X_2} sont de signes contraires, et donc si et seulement si la surface traverse localement son plan tangent (figure 17). □

La figure 11 représentait donc bien un point où la courbure est négative. On en trouvera une autre illustration dans la bande dessinée [**40**], dont je recommande très vivement la lecture.

Le *theorema egregium* de Gauss

En comparant les exemples du cône et du cylindre, on ne peut s'empêcher de penser qu'un plan et un cône, ou un cylindre, sont des surfaces « localement isométriques » : imaginer une feuille de papier (plane) roulée pour former un cône ou un cylindre. Le remarquable[8] théorème de Gauss que nous allons montrer maintenant est une expression précise et générale de cette idée.

Définition IX.3.9. Dire que deux nappes

- d'une part, Σ paramétrée par $f : U \to \mathbf{R}^3$
- et de l'autre Σ' paramétrée par $g : U \to \mathbf{R}^3$

sont *isométriques*, c'est dire que pour tous vecteurs ξ, $\eta \in \mathbf{R}^2$ et tout point m de U, on a

$$\langle df_m(\xi), df_m(\eta)\rangle = \langle dg_m(\xi), dg_m(\eta)\rangle.$$

***Théorème IX.3.10* (*Theorema egregium* de Gauss).** *Si deux nappes de classe $\mathcal{C}^3$ sont isométriques, elles ont la même courbure de Gauss.*

J'insiste : le théorème affirme bien que deux nappes isométriques ont la même courbure, *pas* la même deuxième forme fondamentale (penser au cylindre et au plan).

Remarque IX.3.11. Un des aspects les plus remarquables de ce théorème, c'est qu'il n'est l'analogue d'aucun théorème sur les courbes. Il affirme que deux surfaces qui ont des courbures différentes ne sont pas localement isométriques, alors que l'existence-même de paramétrages par la longueur d'arc (proposition VIII.4.3) montre que toutes les courbes sont localement isométriques (à $\mathbf{R}$, donc entre elles).

Démonstration du théorème IX.3.10. C'est essentiellement un calcul. On montre que la courbure s'écrit en termes de la première forme fondamentale seule.

[8] C'est ce que veut dire le mot latin *egregium*.

Considérons une nappe paramétrée $f : U \to \mathbf{R}^3$. Au point de paramètre (u, v), le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^3$ définit, *via* f, un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$: c'est la première forme fondamentale, en coordonnées. Écrivons la matrice de cette forme quadratique dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. C'est une matrice symétrique dont les coefficients sont des fonctions de (u, v) :

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad E = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle, \ \textit{etc.}$$

Par définition, deux nappes sont isométriques si et seulement si elles ont les mêmes E, F et G. Il s'agit donc de montrer que la courbure K s'exprime en termes de E, F, G seuls. Pour définir la courbure, on a utilisé la deuxième forme fondamentale, écrivons donc aussi sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$:

$$B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

La courbure est le déterminant de la deuxième forme fondamentale *dans une base orthonormée* pour la première forme fondamentale.

Lemme IX.3.12. *La courbure de Gauss s'exprime, en coordonnées, par l'expression*

$$K(u, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Démonstration. Soit S une matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée, de sorte que ${}^tSAS = \mathrm{Id}$. Remarquons que cette égalité implique

$$\text{dét}(S^2) = (\text{dét}\, A)^{-1}.$$

On en déduit le calcul de K :

$$K = \text{dét}({}^tSBS) = \text{dét}(S^2)\,\text{dét}\, B = (\text{dét}\, A)^{-1}\,\text{dét}\, B,$$

ce qui est bien la formule annoncée. □

Revenons à notre théorème. Pour alléger la typographie, notons ${}_u = \partial/\partial u$ (ainsi $f_u = \partial f/\partial u$, *etc.*). La deuxième forme fondamentale est définie par le vecteur normal n et, comme on l'a vu (dans la démonstration du théorème IX.3.6),

$$L = \langle f_{uu}, n \rangle, \quad M = \langle f_{uv}, n \rangle, \quad N = \langle f_{vv}, n \rangle.$$

Au point où nous en sommes de ces expressions en coordonnées, rappelons que

$$n(u, v) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

On a donc

$$L = \left\langle f_{uu}, \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right\rangle, \ M = \left\langle f_{uv}, \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right\rangle, \ N = \left\langle f_{vv}, \frac{f_u \wedge f_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right\rangle.$$

L'essentiel de la démonstration consiste maintenant à évaluer $K(EG-F^2)^2$. Grâce au lemme précédent, on a

$$K(EG - F^2)^2 = \langle f_{uu}, f_u \wedge f_v \rangle \langle f_{vv}, f_u \wedge f_v \rangle - \langle f_{uv}, f_u \wedge f_v \rangle^2.$$

Rappelons que $\langle X, Y \wedge Z \rangle$ est le déterminant de (X, Y, Z) dans une base orthonormée, ici la base canonique de $\mathbf{R}^3$, de sorte que

$$K(EG - F^2)^2 = \text{dét}(f_{uu}, f_u, f_v)\, \text{dét}(f_{vv}, f_u, f_v) - \text{dét}(f_{uv}, f_u, f_v)^2.$$

On ruse en remplaçant certains des systèmes de vecteurs colonnes figurant dans cette égalité par les systèmes correspondants de vecteurs lignes et en remarquant que l'on a

$$\text{dét}(X, Y, Z)\, \text{dét}\, {}^t(X', Y, Z) = \text{dét}((X, Y, Z)\, {}^t(X', Y, Z)) = \begin{vmatrix} X \cdot X' & X \cdot Y & X \cdot Z \\ Y \cdot X' & Y \cdot Y & Y \cdot Z \\ Z \cdot X' & Z \cdot Y & Z \cdot Z \end{vmatrix}$$

(on a, bien sûr, noté (X, Y, Z) la matrice dont les colonnes sont les vecteurs X, Y et Z). On trouve ici :

$$\begin{aligned} &K(EG - F^2)^2 \\ &\quad = \begin{vmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv} \rangle & \langle f_{uu}, f_u \rangle & \langle f_{uu}, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_{vv} \rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv} \rangle & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle f_{uv}, f_{uv} \rangle & \langle f_{uv}, f_u \rangle & \langle f_{uv}, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_{uv} \rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{uv} \rangle & F & G \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dérivons maintenant les relations définissant E, F et G, c'est-à-dire

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \quad F = \langle f_u, f_v \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle.$$

On voit que

$$\langle f_{uu}, f_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \ \textit{etc.} \ \langle f_{uu}, f_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \ \textit{etc.}$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\langle f_{uu}, f_{vv} \rangle - \langle f_{uv}, f_{uv} \rangle = -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}.$$

En reportant toutes ces formules dans notre calcul, on obtient

$$\begin{aligned}4K(EG-F^2)^2 &= E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2)\\ &\quad + F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u)\\ &\quad + G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2)\\ &\quad - 2(EG-F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}),\end{aligned}$$

expression qui permet de calculer K en termes de E, F, G et de leurs dérivées et qui ne fait pas intervenir f, ce qui démontre le théorème. □

Remarque IX.3.13. La réciproque du *theorema egregium* de Gauss est fausse, on trouvera un contre-exemple (classique) dans l'exercice IX.24.

Et après ?

Après Euler et Gauss, Riemann (voir le tome 2 de [**51**]). Nous avons parlé ici uniquement de propriétés *locales* et seulement de surfaces *contenues* dans $\mathbf{R}^3$. Il est possible de définir abstraitement une surface (sans avoir besoin d'un espace ambiant) ou plus généralement une *variété* (la même chose, avec encore plus de dimensions).

Il est aussi possible de parler des propriétés métriques de tels objets et de courbure.

Par exemple, le demi-plan de Poincaré (exercice VI.52) est une surface abstraite dont la courbure est constante et égale à -1. Ceci est lié au fait que la somme des angles de ses triangles est strictement inférieure à π, de même que le résultat analogue pour la sphère (la formule de Girard, ici la proposition V.3.1, qui dit que la somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à π) est lié à sa courbure positive. Rappelons que nous avons utilisé la formule de Girard pour démontrer la formule d'Euler (théorème V.4.4). Eh bien, c'était un exemple de résultat *global* en géométrie différentielle, un cas particulier du théorème de Gauss-Bonnet, qui relie la courbure à la topologie globale de la surface. Voir [**6, 51, 31**] par exemple.

IX.4. Appendice : quelques formules

Dans cet appendice, je vais faire quelques calculs, notamment celui de la courbure de Gauss, pour des surfaces définies par une équation. Considérons donc une fonction $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ et la surface

$$\Sigma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\right\}$$

(pour ces calculs en coordonnées, les indices sont préférables). Notons la dérivée par rapport à x_i, $_i = \ _{x_i} = \partial/\partial x_i$.

Deuxième forme fondamentale

Le vecteur $\nabla_p F = (F_1(p), F_2(f), F_3(p))$ est normal à Σ, donc on peut choisir

$$n(p) = \frac{\nabla_p F}{\|\nabla_p F\|}.$$

On en déduit l'expression de la deuxième forme fondamentale : on a d'abord, si X est un vecteur de $\mathbf{R}^3$,

$$(dn)_p(X) = \frac{1}{\|\nabla_p F\|} d(\nabla_p F)(X) + \lambda(p, X)(\nabla_p F)$$

où je n'ai pas complètement explicité le deuxième terme parce que c'est un vecteur normal à la surface, qui va disparaître quand on fera le produit scalaire avec un vecteur tangent. Le premier terme, lui, se calcule par

$$d(\nabla_p F)(X) = \left(\sum_i F_{1,i}(p) X_i, \sum_i F_{2,i}(p) X_i, \sum_i F_{3,i}(p) X_i \right).$$

Ainsi, si X et Y sont des vecteurs tangents à Σ en p, on a

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = -\frac{1}{\|\nabla_p F\|} \sum_{i,j=1}^{3} F_{i,j}(p) X_i Y_j.$$

Courbures principales

Les courbures principales en p sont donc les extrema de la fonction (de X) $\sum F_{i,j}(p) X_i X_j$ sur l'ensemble des vecteurs unitaires tangents en p, c'est-à-dire sur

$$\left\{ X \in \mathbf{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} F_i(p) X_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{3} X_i^2 = 1 \right\}.$$

C'est un problème simple d'extrema liés (voir l'exercice IX.13). Les solutions sont les X tels qu'il existe des scalaires λ et μ avec

$$\frac{\partial}{\partial X_k} \left(\sum F_{i,j}(p) X_i X_j \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\sum F_i(p) X_i \right) + \mu \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\sum X_i^2 \right),$$

soit

$$2 \sum_{i=1}^{3} F_{i,k}(p) X_i = \lambda F_k(p) + 2\mu X_k.$$

En un tel point X la fonction prend la valeur μ. Les extrema sont donc les réels μ tels qu'il existe un vecteur X non nul et un réel λ avec

$$\sum_{i=1}^{3} F_{i,k}(p)X_i = \frac{\lambda}{2}F_k(p) + \mu X_k \text{ et } \sum_{i=1}^{3} F_i(p)X_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$(d^2F)_p \cdot X = \frac{\lambda}{2}\nabla_p F + \mu X \text{ et } \langle \nabla_p F, X\rangle = 0.$$

La première égalité est une égalité de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, la deuxième est numérique. On les regroupe en une équation dans $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} (d^2F)_p - \mu\,\mathrm{Id} & {}^t\nabla_p F \\ \nabla_p F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tX \\ \dfrac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = 0.$$

Notre problème revient à la nullité du déterminant de la matrice 4×4, une équation du second degré en μ. On obtient ainsi les courbures principales, $K_i(p) = -\mu_i / \|\nabla_p F\|$, où μ_1 et μ_2 sont les solutions de l'équation

$$\begin{vmatrix} (d^2F)_p - \mu\,\mathrm{Id} & {}^t\nabla_p F \\ \nabla_p F & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Courbure de Gauss

On calcule enfin la courbure de Gauss

$$K(p) = K_1(p)K_2(p) = \frac{\mu_1\mu_2}{\|\nabla_p F\|^2}.$$

Exercices et problèmes

Pour tous les exercices qui contiennent des exemples de surfaces, j'invite les lecteurs à essayer leur(s) logiciel(s) préféré(s) pour dessiner les surfaces en question.

***Exercice IX.1* (Équations des surfaces de révolution).** L'espace est muni d'un repère orthonormé dans lequel D est l'axe des z. On suppose que C est décrite, dans le plan xOz, par les équations paramétriques

$$x = r(t) \text{ et } z = z(t).$$

Montrer que S est décrite par les équations paramétriques

$$x = r(t)\cos\theta, \qquad y = r(t)\sin\theta, \qquad z = z(t).$$

Trouver des équations paramétriques pour la sphère, le tore de révolution, le cylindre de révolution, le cône de révolution.

On suppose maintenant que C est décrite par une équation cartésienne $f(x,z)=0$. Montrer que $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ est une équation cartésienne de S.

***Exercice IX.2* (Hélicoïde).** Dessiner la surface paramétrée par

$$(\theta,t)\longmapsto(t\cos\theta,t\sin\theta,a\theta)$$

(a est un scalaire fixé, $(\theta,t)\in\mathbf{R}^2$). Vérifier que c'est une surface réglée (escalier en colimaçon). Que peut-on dire des courbes $t=$ constante ?

***Exercice IX.3* (Conoïde de Plücker).** Pour quelles valeurs de (x,y) l'équation

$$z(x^2+y^2)=xy$$

définit-elle une surface ? Dessiner cette surface. Montrer que c'est une surface réglée.

Exercice IX.4. On donne deux droites non coplanaires D et D'. On fait tourner la droite D' autour de D. Quelle est la surface obtenue ?

***Exercice IX.5* (L'hyperboloïde à une nappe comme surface réglée)**

Soit Γ une ellipse du plan xOy, paramétrée par $(x(\theta),y(\theta))=(a\cos\theta,b\sin\theta)$. Au point de paramètre θ, on associe le vecteur $w(\theta)=(dx/d\theta,dy/d\theta,1)$. Montrer que la surface réglée définie par Γ et w est un hyperboloïde à une nappe (voir l'exercice VII.11).

Montrer qu'un hyperboloïde à une nappe est, de deux façons différentes, une surface réglée.

Exercice IX.6. L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère. Écrire une équation cartésienne du plan (affine) tangent à la surface paramétrée par $(u,v)\mapsto f(u,v)$ au point $f(u_0,v_0)$. On suppose bien sûr que la surface est régulière et le paramétrage injectif.

Exercice IX.7. Quand les vecteurs tangents au méridien et au parallèle passant par un point d'une surface de révolution sont-ils indépendants ? Une surface de révolution peut-elle être régulière en un point où elle rencontre l'axe de révolution ? Quel est alors son plan tangent en ce point ?

Exercice IX.8. On considère une surface réglée paramétrée par

$$\begin{array}{rccc} f: & I\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (t,u) & \longmapsto & \gamma(t)+uw(t) \end{array}$$

(où $w(t)$ ne s'annule pas). Montrer que la droite engendrée par $w(t)$ est dans le plan tangent au point $f(t,u)$. À quelle condition le plan tangent est-il le même en

tous les points de cette droite ? Montrer que tous les points d'une surface réglée conique ou cylindrique sont paraboliques ou planaires.

***Exercice IX.9* (Queue d'aronde).** On considère l'espace (affine réel de dimension 3) $\mathcal{E}$ des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$. Décrire par des équations paramétriques la partie de $\mathcal{E}$ constituée des polynômes qui ont une racine multiple et la dessiner[(9)]. Vérifier que c'est une surface et décrire ses points singuliers.

***Exercice IX.10* (Parapluie de Whitney).** On considère la surface paramétrée par

$$(u, v) \longmapsto (uv, v, u^2).$$

La dessiner (figure 18). Montrer que la demi-droite ($x = y = 0$, $z > 0$) est une

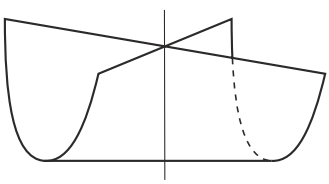


Figure 18. Parapluie de Whitney

ligne de points doubles et que l'origine de $\mathbf{R}^3$ est un point singulier. Montrer que pour $v \neq 0$ le vecteur

$$N(u, v) = \left(-2\frac{u}{v}, 2\frac{u^2}{v}, 1\right)$$

est normal à la surface et qu'il n'a pas de limite quand (u, v) tend vers $(0, 0)$ (les plans tangents n'ont donc pas de limite au point singulier).

***Exercice IX.11* (Points paraboliques et planaires).** Pour chacune des équations suivantes, représenter la surface et étudier sa position par rapport à son plan tangent en 0 : $z = x^2$, $z = x^2 + y^3$, $z = x^3$, $z = x^4$, $z = x^3 - 3xy^2$ (« selle de singe »).

***Exercice IX.12*.** Comment les plans parallèles au plan tangent rencontrent-ils une surface près d'un point elliptique ? hyperbolique ?

Sur une carte IGN au 50 000e des Vosges, contempler les courbes de niveau, puis trouver les cols et les sommets.

(9) ou la faire dessiner par *maple* ou un de ses confrères

***Exercice IX.13* (Extrema liés).** On donne une fonction $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour que p soit un extremum de h avec la contrainte $F(p) = 0$, il faut que $(dh)_p$ soit un multiple de $(dF)_p$. Étudier l'exemple de

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

et $h(x, y, z) = z$.

Soit $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ une autre fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $(dF)_p$ et $(dG)_p$ soient indépendantes pour tout p vérifiant $F(p) = G(p) = 0$. Montrer que, pour que p soit un extremum de h avec les contraintes $F(p) = G(p) = 0$, il faut que $(dh)_p$ soit une combinaison linéaire de $(dF)_p$ et $(dG)_p$.

***Exercice IX.14* (Enveloppes (retour)).** On considère, comme au § VIII.1, la famille de droites (du plan) d'équations $u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$. À quelle condition cette égalité définit-elle une surface Σ régulière de l'espace des (x, y, t) ? On considère maintenant la restriction π de la projection $(x, y, t) \mapsto (x, y)$ à Σ. Pour quels points p de Σ l'application tangente

$$T_p\pi : T_p\Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

n'est-elle pas surjective ? Montrer que les images de ces points dans $\mathbf{R}^2$ (le *contour apparent* de Σ) forment l'enveloppe de la famille de droites.

La fronce. Dessiner Σ, la projection et le contour apparent dans le cas des droites d'équations $3tx - 2y - t^3 = 0$. Pour chaque point du plan, on indiquera le nombre de points de la surface dont il est l'image. Quel rapport cette question a-t-elle avec l'exercice VIII.6 ?

Exercice IX.15. On donne un point O et une courbe Γ d'un plan ne contenant pas O. Soit Σ le cône de sommet O basé sur Γ. Évaluer la courbure de Σ.

Exercice IX.16. Soit Σ la quadrique d'équation

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3} = 1.$$

Calculer sa courbure de Gauss.

***Exercice IX.17* (Surfaces de révolution à courbure constante)**

On considère une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc et on la fait tourner autour d'une droite de son plan qu'elle ne rencontre pas, obtenant une surface paramétrée par

$$(s, \theta) \longmapsto (g(s)\cos\theta, g(s)\sin\theta, h(s))$$

avec $g'^2 + h'^2 = 1$. Montrer que la courbure K vaut, au point de paramètre (s, θ),

$$K(s, \theta) = -g''(s)/g(s).$$

On suppose maintenant que K est constante.

(1) Montrer que, si K est nulle, la surface de révolution est un plan, un cylindre ou un cône.

(2) Si $K > 0$, écrire la solution générale $(g(s), h(s))$ et vérifier que les sphères sont des solutions.

(3) Si $K < 0$, écrire la solution générale $(g(s), h(s))$. Dessiner la surface obtenue pour

$$g(s) = e^s \qquad h(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}} dt$$

(pseudosphère[10]).

Exercice IX.18. Contempler un tore de révolution et deviner en lesquels de ses points il a une courbure positive, resp. négative. Calculer la courbure pour vérifier.

Exercice IX.19. Soit Σ une surface *compacte* de l'espace affine euclidien. Montrer qu'il existe un point de Σ où la courbure est strictement positive[11]. Indication : on pourra fixer un point O de l'espace et montrer qu'en les points de Σ dont la distance à O est maximale, la courbure de Σ est strictement positive.

***Exercice IX.20* (La bande de Möbius).** Dessiner la surface M paramétrée par

$$(\theta, t) \longmapsto \left(\cos\theta + t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \sin\theta + t\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

($\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$). Montrer que M est homéomorphe à une bande de Möbius (exercice VI.49)... mais que cette surface de $\mathbf{R}^3$ ne peut *pas* s'obtenir en recollant une bande de papier selon la figure 23 du chapitre VI.

***Exercice IX.21* (Ombilics).** On dit qu'un point p d'une surface est un *ombilic* si les courbures principales coïncident en p. Quels sont les ombilics sur une sphère ? Montrer qu'un ellipsoïde a, en général, quatre ombilics, qu'un tore de révolution n'a aucun ombilic.

---

[10] Les courbes méridiennes obtenues sont des *tractrices*, entre autres propriétés, une tractrice est la développée d'une *chaînette*, graphe de la fonction « cosinus hyperbolique » cosh.

[11] C'est pourquoi les exemples de surface à courbure partout négative donnés ici (exercice IX.17 notamment) sont des surfaces non compactes.

Exercice IX.22. On veut montrer qu'une surface dont tous les points sont des ombilics (exercice IX.21) est une partie d'une sphère ou d'un plan. On considère une nappe paramétrée par $f : U \to \mathbf{R}^3$ et on suppose que tous ses points sont des ombilics. Montrer qu'il existe une constante k et un vecteur v tels que $n = -kf+v$. Si $k = 0$, montrer que l'image de f est contenue dans un plan. Si $k \neq 0$, montrer que l'image de f est contenue dans une sphère centrée en v/k.

***Exercice IX.23* (Géodésiques).** Une courbe $s \mapsto f(s)$ paramétrée par la longueur d'arc et dessinée sur une surface Σ est appelée une *géodésique* si $f''(s)$ est un vecteur normal[12] à Σ en $f(s)$ pour tout s. Quelles sont les géodésiques d'une sphère ? d'un plan ? d'un cylindre ?

Exercice IX.24. Dessiner la surface de révolution Σ paramétrée par

$$f : (t, \theta) \longmapsto (t \sin\theta, t \cos\theta, \log t)$$

et calculer sa courbure.

On considère l'hélicoïde (exercice IX.2) paramétré par

$$g : (t, \theta) \longmapsto (t \cos\theta, t \sin\theta, \theta).$$

Montrer que sa courbure au point de paramètre (s, θ) est la même que celle de Σ, mais que les deux surfaces ne sont pas (localement) isométriques.

[12] C'est dire que l'accélération n'a pas de composante tangentielle. On conçoit que cette propriété soit liée à une minimisation locale de la distance parcourue.

INDICATIONS POUR LES EXERCICES

On trouvera ici pêle-mêle des indications de solutions, des commentaires ou des références bibliographiques pour certains des exercices. Ce ne sont *pas* des solutions, même quand elles sont relativement détaillées. Elles ne dispensent les lectrices

– ni de *chercher* l'exercice (en particulier en faisant une ou des figures),

– ni d'en *rédiger* une solution (certaines des indications données ici sont vraiment en style télégraphique),

– ni d'être attentives aux réciproques. Quand j'écris par exemple « le point P est sur le cercle de diamètre IJ », je n'écris pas « le lieu des points P est le cercle de diamètre IJ ».

Le système de références internes est le même que dans tout le livre, à cela près qu'ici la « figure x » désigne

– la figure numérotée x dans le chapitre considéré si x est un nombre,

– la figure x ici (une nouvelle figure) si x est une lettre.

Chapitre I

Exercice I.4. Chaque droite possède trois points (le même nombre d'éléments que le corps de base), par chaque point passent quatre droites, de sorte qu'il y a $4\times 9/3$, douze droites.

Exercice I.5. Supposons que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ soit un sous-espace affine.

– Si $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \varnothing$, soient $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$. Alors la droite AB est dans $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ donc le milieu de AB est dans $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ alors qu'il n'est ni dans $\mathcal{F}_1$ ni dans $\mathcal{F}_2$, ce qui est absurde.

– Si $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \varnothing$, choisissons un point O dans cette intersection. On vectorialise en O et on est ramené à la situation de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 dont la réunion est un sous-espace vectoriel. Si $F_2 \not\subset F_1$, il y a un vecteur $v \in F_2$ qui n'est pas dans F_1. Soit $u \in F_1$. On a $u+v \in F_1 \cup F_2$ puisque c'est un sous-espace vectoriel et $u+v \notin F_1$ (puisque $v \notin F_1$), donc $u+v \in F_2$, donc $u \in F_2$ et $F_1 \subset F_2$.

En conclusion, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Exercices I.9 et I.10. Revenir à l'algèbre linéaire.

Exercice I.16. On suppose qu'on a

$$(\forall\, x \in E) \quad (\exists\, \lambda \in \mathbf{K}) \quad (f(x) = \lambda x),$$

écriture dans laquelle, *a priori*, $\lambda = \lambda_x$ dépend de x. On vérifie que

– si $\dim E = 1$, λ ne dépend pas de x,
– si $\dim E \geq 2$, pour deux vecteurs indépendants x et y, on a

$$\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

donc $\lambda_x = \lambda_y$, dont on déduit sans mal qu'en fait, λ_x ne dépend pas de x.

Ainsi, on a

$$(\exists\, \lambda \in \mathbf{K}) \quad (\forall\, x \in E) \quad (f(x) = \lambda x),$$

ce qui veut dire que f est une homothétie vectorielle.

Exercice I.21. Utiliser le théorème des points fixes (théorème I.3.22).

Exercice I.23. L'application linéaire $\overrightarrow{\varphi}$ envoie tout vecteur sur un vecteur colinéaire. D'après le « truc » de l'exercice I.16, c'est une homothétie vectorielle.

Exercice I.24. Si une partie a deux centres de symétrie, il y a une translation qui la préserve : la composée de deux symétries centrales est une translation.

Exercice I.27. Les trois points A, B et C forment un repère affine, donc φ est déterminée par leurs images. L'unique application affine ψ qui satisfait $\psi(A) = C$, $\psi(B) = A$ et $\psi(C) = B$ satisfait aussi $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$, donc φ est bijective. D'ailleurs on a $\psi = \varphi^2$ puisque $\varphi^3 = \mathrm{Id}$. Le centre de gravité G du triangle ABC est fixé par φ. On a aussi

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

et de même $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB}$. Si M est un point quelconque et M' son image,

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{\varphi(C)\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM}).$$

Donc on a dans le repère en question

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x-y \\ x \end{pmatrix}.$$

On pourra déterminer, à titre de vérification, les coordonnées du point fixe...

Exercice I.33. On déterminera les sommets A, B, C et D du parallélogramme. Noter qu'il existe une application affine envoyant un quadrilatère sur un parallélogramme si et seulement si ce quadrilatère est un parallélogramme.

Exercice I.35. On pourra considérer le barycentre M_1 de $((M,\alpha),(M',-1))$, montrer qu'il est invariant et que l'application qui à M associe M_1 est une projection.

Exercice I.39. Le point de concours est le barycentre du système de points pondérés $((A,1-k),(B,k),(C,1-k),(D,k))$.

Exercice I.42. Appelons I le milieu de BD (et J celui de AC). On a

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{IC'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \overrightarrow{A'C'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{B'D'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} \end{cases}$$

de sorte que $A'B'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par une homothétie dont le rapport est $-1/3$. Le milieu de IJ est l'isobarycentre de $ABCD$. Par associativité, il est sur AA' (comme barycentre de A et du centre de gravité de BCD) et de même sur BB', CC' et DD', c'est donc le centre de l'homothétie.

Exercice I.43. On a $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, *etc.* donc l'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie A' sur A, B' sur B et C' sur C. On calcule ensuite

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{MA'} - k\overrightarrow{MA'} = (1-k)\overrightarrow{MA'},$$

donc pour $k \neq 1$, $\overrightarrow{MA'} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{MP}$. Les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $1/(1-k)$ sont donc respectivement A', B' et C'. Enfin, l'application composée des deux homothéties évoquées envoie P sur A, Q sur B et R sur C. Le produit des rapports est $-2/(1-k)$. Donc, si $k \neq 3$ (c'est-à-dire si ce produit n'est pas égal à 1), il y a une homothétie qui transforme P en A, *etc.*, et si $k = 3$, c'est une translation. Les droites AP, BQ et CR sont concourantes dans le premier cas et parallèles dans le deuxième.

Exercice I.44. Attention, si $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ est un système de coordonnées barycentriques de M et si μ est n'importe quel scalaire non nul, $(\mu\lambda_0,\ldots,\mu\lambda_n)$ est *aussi* un système de coordonnées barycentriques de M.

Exercice I.46. L'enveloppe convexe de $A_0, \ldots, A_N$ est l'image de

$$K = \left\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1\right\},$$

compact notoire de $\mathbf{R}^N$, par l'application continue qui, à $(x_1, \ldots, x_N)$, associe le point M défini par

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{N} x_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Exercice I.47. Soit n la dimension de l'espace affine. Extrayons $n+1$ points indépendants $A_0, \ldots, A_n$ de S (on utilise que S n'est pas contenu dans un hyperplan). Soit U l'ensemble des barycentres de ces $n+1$ points affectés de coefficients strictement positifs :

$$U = \left\{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{A_0M} = x_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{A_0A_n} \text{ avec } x_i > 0 \text{ et } \sum x_i < 1\right\}.$$

– C'est un ouvert.

– Il n'est pas vide puisqu'il contient l'isobarycentre des quatre points.

– Il est contenu dans $\mathcal{C}(S)$, qui est constituée des barycentres des points de l'ensemble S affectés de coefficients positifs ou nuls (proposition I.6.6).

On a construit un ouvert non vide U contenu dans $\mathcal{C}(S)$, l'intérieur de celui-ci n'est donc pas vide.

Exercice I.49. En dimension supérieure ou égale à 3, on peut « faire le tour » d'une droite, le complémentaire est connexe. Une démonstration formelle : on choisit un repère affine dont l'origine est sur la droite et le premier vecteur la dirige ; on est alors dans le cas de la droite $\mathbf{R} \times \{0\}$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$; pour $n-1 \geq 2$, $\mathbf{R}^{n-1} - \{0\}$ est connexe par arcs (c'est là qu'on « fait le tour », clair ?), donc

$$\mathcal{E} - D = \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^{n-1} - \{0\})$$

est connexe par arcs comme produit de deux espaces connexes par arcs.

De même, le complémentaire d'une droite complexe dans un plan complexe est connexe par arcs comme le complémentaire de 0 dans $\mathbf{C}$.

Exercice I.50. Dans le cas du centre de gravité c'est l'homothétie de centre le milieu de AB et de rapport 1/3. Dans le cas de l'orthocentre, ce n'est pas une application affine. On le démontre en exhibant trois points alignés dont les images ne sont pas alignées (en se souvenant que l'orthocentre d'un triangle rectangle est le sommet de l'angle droit) : on trace un demi-cercle de diamètre AB et la tangente à ce demi-cercle qui est parallèle à AB ; soient a et b les deux points de cette tangente tels que aAB soit rectangle en A et bBA en B, et soit m le milieu de ab (si vous n'avez pas encore fait de figure, c'est normal que vous ne

compreniez pas !) ; les trois points alignés m, a et b sont envoyés sur trois points non alignés (respectivement m, A et B).

Exercice I.52. On pourra utiliser la composée des symétries centrales $\sigma_{A_1} \circ \cdots \circ \sigma_{A_n}$, qui est une translation ou une symétrie centrale selon que n est pair ou impair. Le point B_1 cherché doit être un point fixe de cette composée... il y a donc toujours une unique solution lorsque n est impair, et aucune solution (si le vecteur de la translation n'est pas nul) ou tout point est solution (si le vecteur de la translation est nul) lorsque n est pair. Par exemple, pour $n = 4$, on sait bien que les milieux des côtés de n'importe quel quadrilatère forment un parallélogramme, cette condition (que $A_1A_2A_3A_4$ soit un parallélogramme) est donc nécessaire à l'existence d'une solution !

Exercice I.53. Le point M_1 est l'image de M_0 par l'homothétie $h\left(A, \frac{1}{2}\right)$, M_2 celle de M_1 par $h\left(B, \frac{1}{2}\right)$ et M_3 celui de M_2 par $h\left(C, \frac{1}{2}\right)$. Puis on recommence. Ainsi,

$$\varphi_n = \underbrace{\cdots \circ h\left(C, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(B, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(A, \frac{1}{2}\right)}_{n \text{ fois}}$$

est une homothétie de rapport $1/2^n$ et en particulier une application affine.

Soient D le point aux $2/3$ de AB en partant de A et E celui aux $3/7$ de CD en partant de C, de sorte que

$$h\left(B, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(A, \frac{1}{2}\right) = h\left(D, \frac{1}{4}\right)$$

et

$$h\left(C, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(B, \frac{1}{2}\right) \circ h\left(A, \frac{1}{2}\right) = h\left(E, \frac{1}{8}\right) = \varphi_3$$

et que

$$\varphi_{3n} = (\varphi_3)^n = h\left(E, \frac{1}{8^n}\right).$$

En particulier, la suite M_{3n} vérifie

$$\overrightarrow{EM_{3(n+1)}} = \frac{1}{8}\overrightarrow{EM_{3n}} = \frac{1}{8^{n+1}}\overrightarrow{EM_0}$$

et elle converge vers E. Si la suite M_n était convergente, la limite serait E et on aurait $\varphi_{3n+1}(E) = E$. Or φ_{3n+1} est une homothétie dont le centre est un point de AE distinct de E.

Exercice I.54. On a

$$h\left(A,\frac{1}{2}\right)\circ h\left(B,\frac{1}{2}\right)\circ h\left(C,\frac{1}{2}\right)=h\left(B',\frac{1}{8}\right).$$

Si I est défini par $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{CB}$, l'image de I par cette homothétie est le milieu J de AB. On en déduit la position de B' sur IJ et la construction.

Exercice I.55. On pourra chercher un système de coordonnées barycentriques du point A'' (figure 20) dans le triangle ABC ; on pourra utiliser aussi le fait que l'aire du triangle $AA'B$ est le tiers de l'aire du triangle ABC.

Exercice I.56. L'homothétie de centre C' et de rapport $\overline{C'A}/\overline{C'B}$ transforme B en A, celle de centre B' et de rapport $\overline{B'C}/\overline{B'A}$ transforme A en C. On pourra utiliser leur composée. La réciproque est conséquence du sens direct.

On a $\overline{A''C}=-\overline{A'B}$, *etc.* donc A'', B'' et C'' vérifient la même relation que A', B' et C'.

Les points F, G et I sont sur la parallèle à $A'B'$ passant par G, *etc.* donc I, J et K sont trois points sur les côtés du triangle EFG. On montre que

$$\frac{\overline{IF}}{\overline{IG}}\cdot\frac{\overline{JG}}{\overline{JE}}\cdot\frac{\overline{KE}}{\overline{KF}}=1$$

et on applique le théorème de Menelaüs.

Exercice I.57. Le plus simple est d'utiliser l'associativité des barycentres. Mais c'est aussi une conséquence du théorème de Menelaüs.

Exercice I.59. On peut utiliser le théorème de Menelaüs un certain nombre (cinq dans un sens et une dans l'autre) de fois dans le triangle MNP où $M=BC'\cap CA'$, $N=CA'\cap AB'$ et $P=AB'\cap BC'$. On écrit que α, B', C, respectivement β, C', A, respectivement γ, A', B, sont alignés sur les côtés de ce triangle. On en déduit que

$$\frac{\overline{\alpha M}}{\overline{\alpha B}}\cdot\frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma N}}\cdot\frac{\overline{\beta N}}{\overline{\beta M}}=-\left(\frac{\overline{B'N}}{\overline{B'P}}\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{C'P}}{\overline{C'M}}\frac{\overline{AN}}{\overline{AP}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'N}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BM}}\right)$$

(déjà trois fois), mais A, B, C, respectivement A', B', C', sont aussi alignés sur les côtés de ce triangle, donc en regroupant convenablement les termes, ce produit vaut -1 (voilà les cinq fois dans un sens), et donc (une fois dans l'autre sens), α, β et γ sont alignés.

Exercice I.60. Si AA', BB' et CC' sont concourantes en O, utiliser Menelaüs dans les triangles OAB, OAC, OBC et ABC.

Exercice I.61. Si β et γ sont les points $\beta=BM\cap PB'$, $\gamma=CM\cap PC'$, la droite CC' est l'image de PM par une homothétie de centre γ, donc γ, K et I sont

alignés. De même pour β, I et J. De plus $\beta P \gamma M$ est un parallélogramme, donc β, I et γ sont alignés.

Pour la question suivante, on peut utiliser une affinité de droite BC.

Exercice I.62. On pourra utiliser le théorème de Desargues pour construire un autre point de la droite... qui est sur la feuille.

Exercice I.65. On pourra utiliser les homothéties (ou même seulement les symétries centrales) et l'exercice I.29.

Exercice I.66. On obtient la bijection en reformulant la décomposition d'une application affine en composée d'une application fixant O et d'une translation. Il n'y a pas d'isomorphisme de groupes, comme on pourra s'en convaincre en comparant les centres des deux groupes (et en utilisant l'exercice I.65).

Exercice I.67. En cas de besoin, on trouvera une démonstration du théorème « fondamental », dont l'énoncé de cet exercice est inspiré, dans [**5**].

Chapitre II

Exercice II.1. On écrit que $\|\lambda x + y\|^2$ est positif pour tout λ, c'est-à-dire que le trinôme

$$\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda x \cdot y + \|y\|^2$$

est de signe constant, ou que son discriminant est négatif :

$$(x \cdot y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \text{ ou } |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a égalité si et seulement si

– le trinôme a une racine réelle (double) λ (c'est dire que $\lambda x + y = 0$ pour un certain λ),

– et $x \cdot y \geq 0$ (à cause de la racine carrée),

soit, si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Exercice II.3. On pourra développer $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$ ou utiliser le fait qu'il existe des bases orthonormées, voire utiliser l'exercice II.5.

Exercice II.4. Pour tous points O et G, on a

$$OA^2 = OG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GA} \qquad OB^2 = OG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GB}$$

et donc aussi

$$\alpha OA^2 + (1-\alpha)OB^2 = OG^2 + \alpha GA^2 + (1-\alpha)GB^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot (\alpha\overrightarrow{GA} + (1-\alpha)\overrightarrow{GB}).$$

On a l'égalité de l'énoncé pour un certain point G si et seulement si celui-ci vérifie, pour tout point O,

$$\overrightarrow{OG} \cdot (\alpha\overrightarrow{GA} + (1-\alpha)\overrightarrow{GB}) = 0,$$

c'est-à-dire si G est barycentre de $((A,\alpha),(B,1-\alpha))$.

Exercice II.5. On peut montrer que φ préserve les barycentres, par exemple en utilisant l'exercice II.4. En notant avec des $'$ les images des points, l'égalité de l'exercice II.4 et la conservation des distances impliquent qu'on a, pour tout point O, l'égalité

$$\alpha O'A'^2 + (1-\alpha)O'B'^2 = O'G'^2 + \alpha G'A'^2 + (1-\alpha)G'B'^2.$$

Si on était sûr que le point O' obtenu peut être n'importe quel point, ceci impliquerait, toujours d'après II.4, que G' est le barycentre de $((A',\alpha),(B',1-\alpha))$, ce qui suffirait pour affirmer que φ est affine (proposition I.3.8).

Il suffit donc de vérifier que φ est surjective. Fixons un repère affine. Pour simplifier, faisons-le dans un plan, de sorte que le repère est formé de trois points non alignés A, B et C. Leurs images A', B' et C' ne sont pas alignées non plus (à cause de la conservation des distances et de l'inégalité triangulaire). Soit N un point du plan. Il y a un unique point M tel que

$$MA = NA', \quad MB = NB' \quad MC = NC'$$

et alors $\varphi(M) = N$.

Exercice II.6. L'image du vecteur $u+v$ par une symétrie par rapport à un hyperplan contenant u et dans la direction de v est le vecteur $u-v$. On remarque ensuite que

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4u \cdot v$$

donc $u+v$ et $u-v$ n'ont la même norme que si u et v sont orthogonaux.

Exercice II.7. On écrit $x = y + \lambda x_0$, où $y \in H$ et λ se détermine par

$$x \cdot x_0 = \lambda \|x_0\|^2 \text{ donc } \lambda = \frac{x \cdot x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Mais alors

$$s_H(x) = y - \lambda x_0 = x - 2\lambda x_0 = x - 2\frac{x \cdot x_0}{\|x_0\|^2} x_0.$$

Si $x = y$, tout hyperplan contenant x convient. Sinon, $H = \langle x-y \rangle^\perp$ convient (et est seul à le faire).

Exercice II.9. La formule pour $F(M)$ se démontre exactement comme celle de l'exercice II.4 qui en est un cas particulier. Les lieux demandés sont

– un cercle (peut-être vide ou réduit à un point), celui de centre le milieu G de AB et lieu des points M tels que

$$GM^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}AB^2\right),$$

– une droite orthogonale à AB, puisque

$$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right),$$

de sorte que la relation est équivalente à $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = 2k$ (pour I le milieu de AB),

– la médiatrice de AB si $k = 1$ et un cercle (centré au barycentre G de $((A,1),(B,k^2))$ si $k \neq 1$, auquel cas la relation est équivalente à

$$MG^2 = \frac{-GA^2 + k^2 GB^2}{1 - k^2}.$$

Exercice II.13. Pour qu'il y ait une solution avec M et N à l'intérieur du segment BC, il est nécessaire que les angles en B et C soient aigus. Pour la construction, utiliser un carré extérieur au triangle dont l'un des côtés est BC et une homothétie de centre A.

Exercice II.14. Utiliser le symétrique B' de B par rapport à $\mathcal{D}$.

Exercice II.15. On remarque que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est fixe. Appelons-le u et considérons le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = u$. Pour la première question, la médiatrice de $A'B$ coupe $\mathcal{D}'$ en M', on en déduit M. Pour la deuxième, le cercle de diamètre $A'B$ coupe $\mathcal{D}'$ en (en général) deux points qui sont des M' solutions. Enfin pour la troisième, $AM + MM' + M'B$ est minimal si et seulement si $AM + M'B$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $A'M' + M'B$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si M' est sur $A'B$ entre A' et B.

Exercice II.16. La valeur absolue du rapport de l'homothétie est le rapport R'/R des rayons. Le centre est un des points S de la droite OO' des centres vérifiant $SO'/SO = R'/R$. On peut alors utiliser la dernière question de l'exercice II.9. En général, il y a une homothétie de rapport positif et une de rapport négatif. Attention au cas où les deux cercles ont le même rayon et au cas où ils ont le même centre.

Exercice II.17. La composée des homothéties de centres I_1 et I_2 considérées est une homothétie de rapport positif. De plus, elle envoie $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_1$, mais il n'y a qu'une homothétie de rapport positif qui envoie $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_1$ et elle a pour centre I_3,

donc les trois points I_1, I_2 et I_3 sont alignés en vertu du résultat de l'exercice I.31. Les autres alignements se montrent de la même façon (vérifier que l'on n'arrive pas à démontrer ainsi que J_1, J_2 et J_3 sont alignés).

Ensuite, O_2 et O_3 sont alignés avec I_1 et J_1 et de même O_3 et O_1 sont sur I_2J_2, O_1 et O_2 sur I_3J_3, de sorte que O_3 est le point d'intersection de I_1J_1 et I_2J_2, *etc.*

Exercice II.18. Si les deux droites se coupent en A et si le point donné, disons M, n'est sur aucune des deux, on pourra construire un cercle tangent aux deux droites, disons de centre Ω', le cercle cherché en étant l'image par une homothétie de centre A. On pourra déterminer le centre en traçant la droite AM qui coupe le cercle dessiné en deux points disons M' et M'', puis en dessinant la parallèle à $\Omega'M'$ (ou à $\Omega'M''$), qui coupera la droite $A\Omega'$ au centre Ω du cercle désiré. Traiter de façon analogue le cas où les deux droites données sont parallèles.

Exercice II.19. Le fait que les médiatrices des trois côtés d'un triangle soient concourantes (existence du cercle circonscrit) est assez évident, le point de rencontre de deux des médiatrices étant équidistant des trois sommets et donc aussi sur la troisième médiatrice. Il est un peu moins facile de démontrer que les trois hauteurs sont, elles aussi concourantes (existence de l'orthocentre), mais la figure en question montre ces hauteurs comme les médiatrices des côtés d'un autre triangle et permet donc d'obtenir gratuitement la concourance espérée.

Exercice II.20. Soit I le milieu de AB. Utiliser l'homothétie de rapport $-1/2$ et de centre le centre de gravité G de AMB pour montrer l'égalité $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OI}$ (O est le centre de $\mathcal{C}$). On peut aussi utiliser des translations (voir [**16**]) ou des angles (chapitre suivant).

Exercice II.21. Appelons $A'B'C'$ le triangle formé par les parallèles aux côtés de ABC passant par ses sommets. Ainsi l'orthocentre H de ABC est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$ (exercice II.19) et les deux triangles ont le même centre de gravité G. L'homothétie envoyant $A'B'C'$ sur ABC a pour rapport $-1/2$, son centre est sur AA', BB' et CC', c'est donc le point G. Envoyant le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$ sur celui du cercle circonscrit à ABC, elle nous donne donc la relation $\overrightarrow{GO} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Soit ω le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle IJK. L'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie I sur A, J sur B et K sur C, elle envoie donc $\mathcal{C}$ sur le cercle circonscrit à ABC et l'on a $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{G\omega}$. Il y a aussi une homothétie de rapport 2 qui envoie $\mathcal{C}$ sur le cercle circonscrit. Comme

$$\overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{H\omega},$$

le centre est H. Cette homothétie envoie A sur le milieu L de AH, donc ce point est sur $\mathcal{C}$ (et de même pour les milieux de HB et de HC).

Toujours en utilisant l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$, on voit que $\overrightarrow{OI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HA}$. Comme $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LH}$, on a $\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{OI}$, donc ω, milieu de OH est aussi celui de LI, qui est un diamètre de $\mathcal{C}$. Donc le pied de la hauteur est sur $\mathcal{C}$, lui aussi.

Exercice II.22. On utilise le « truc » de l'exercice I.16.

Exercice II.24. Soit J la matrice diagonale

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Les isométries ont des matrices A qui vérifient ${}^tAJA = J$. Les éléments de $\mathrm{O}_q(2)$ sont les matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon\cosh t & \eta\sinh t \\ \sinh t & \varepsilon\eta\cosh t \end{pmatrix} \text{ où } t \in \mathbf{R} \text{ et } \varepsilon^2 = \eta^2 = 1.$$

Le groupe O_q n'est donc pas compact quand $n = 2$ et pas plus en général : il contient un sous-groupe fermé non compact. Le groupe O_q^+ a deux composantes connexes ($\eta = 1$) et le groupe O_q en a quatre.

Chapitre III

Exercice III.2. L'application linéaire associée est l'identité donc c'est une translation. C'est le vecteur de cette translation qu'on demande de déterminer ! Eh bien, appelons A' l'image de A par la rotation $\rho_{B,-\theta}$, ainsi le vecteur désiré est $\overrightarrow{AA'}$.

Exercice III.4. Les applications affines sont les $z \longmapsto az + b\overline{z} + c$, les transformations affines celles qui sont bijectives, c'est-à-dire celles pour lesquelles

$$|a|^2 - |b|^2 \neq 0.$$

Exercice III.5. Le groupe $\mathrm{O}^+(P)$ est commutatif, donc l'isométrie vectorielle associée au commutateur de φ et ψ est l'identité et donc ce commutateur est une translation.

Considérons une partie bornée du plan. Si le groupe des isométries qui la préservent n'est pas commutatif, il doit contenir, d'après ce qui précède, une translation de vecteur non nul. Mais une translation non triviale ne peut pas préserver

une partie bornée. Elle est d'ailleurs d'ordre infini dans le groupe affine et ne peut donc être un élément d'un sous-groupe fini.

Exercice III.6. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les éléments de G et soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$. L'isobarycentre de $\varphi_1(M), \ldots, \varphi_n(M)$ est fixé par tous les éléments de G.

Exercice III.8. Le rapport d'une similitude envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ est le rapport $k = \dfrac{R'}{R}$ de leurs rayons. Le centre A vérifie l'égalité $\dfrac{AO'}{AO} = k$. Il est donc

– sur un cercle (le cercle de diamètre SS' où S et S' sont les centres des homothéties envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, voir l'exercice II.16) si $R \neq R'$,

– sur la médiatrice de OO' si $R = R'$.

Et naturellement, il faut étudier la réciproque...

Exercice III.9. On utilise une translation pour envoyer F sur F', puis une rotation de centre F' pour envoyer l'image de $\mathcal{D}$ sur une droite parallèle à $\mathcal{D}'$ et enfin une homothétie de centre F' pour envoyer cette droite sur $\mathcal{D}'$. La composée est une similitude directe et fait ce qu'on veut, non ?

Exercice III.10. Pour un segment AB, toute isométrie vérifie $\varphi(A) = A$ et $\varphi(B) = B$ ou $\varphi(A) = B$ et $\varphi(B) = A$, puisque la longueur $\varphi(A)\varphi(B) = AB$ est le maximum des distances de deux points de AB. Donc les isométries fixent le milieu I de AB. Il y a donc l'identité, la symétrie par rapport à AB, la symétrie par rapport à la médiatrice de AB et la symétrie de centre I, ce groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$.

Pour le rectangle ou le losange, c'est le même groupe : une isométrie préserve le rectangle $ABCD$ si et seulement si elle préserve le segment PQ (où P est le milieu de AD et Q celui de BC), et d'ailleurs aussi si et seulement si elle préserve le losange $PRQS$ (où R est le milieu de AB et S celui de DC).

Les sommets d'un triangle équilatéral forment un repère affine, donc les images des sommets déterminent l'isométrie, on en déduit sans trop de mal un isomorphisme de ce groupe avec le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. Les réflexions autour des hauteurs correspondent aux transpositions, les rotations autour du centre aux cycles d'ordre 3. On remarque que ce groupe est aussi le groupe diédral D_6, ce qui amène au cas général d'un polygone régulier à n côtés, dont le groupe des isométries est D_{2n} (comme on l'utilise au § V.5). Dans ce cas, le groupe contient les rotations d'ordre n autour du centre et les réflexions par rapport aux droites joignant un sommet au milieu du côté opposé (cas où n est impair, il y en a n) ou deux sommets opposés et les milieux de deux côtés opposés (cas où n est pair, il y en a n).

Une isométrie qui préserve un cercle envoie un diamètre (qui maximise la distance entre deux points du cercle) sur un autre diamètre, donc deux diamètres sur deux diamètres et donc le centre sur le centre. D'autre part, toutes les isométries fixant le centre préservent le cercle, le groupe demandé est donc isomorphe à $\mathrm{O}(2)$. Les isométries qui préservent le cercle et une droite préservent (point par point) la perpendiculaire à cette droite passant pas le centre, il n'y a donc que l'identité et la réflexion par rapport à cette perpendiculaire, le groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$. Une application affine qui préserve le cercle envoie un diamètre AB sur une corde $A'B'$. L'image O' du centre O est le milieu de $A'B'$, et ceci pour tout diamètre AB. On en déduit que $O' = O$ et que l'application affine est une isométrie.

Considérons enfin le réseau des entiers dans $\mathbf{R}^2$. Les isométries sont déterminées par l'image du point $(0,0)$ et des points $(1,0)$ et $(0,1)$. Celles-ci sont respectivement n'importe quel point à coordonnées entières (a,b), puis les points $(a \pm 1, b)$ et $(a, b \pm 1)$ ou $(a, b \pm 1)$ et $(a \pm 1, b)$ (avec signes indépendants). Le groupe est donc engendré par les translations entières et le groupe des isométries préservant le carré de sommets $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, un groupe diédral, celui des matrices

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon' \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta' & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = \eta^2 = \eta'^2 = 1.$$

Exercice III.11. Pour les déplacements, tous les sous-groupes finis du groupe des isométries affines du plan sont abéliens (exercice III.5). Pour les isométries, on pourra démontrer et utiliser le fait que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'indice 2.

Exercice III.12. On peut utiliser le théorème de l'angle inscrit (c'est-à-dire la proposition III.1.18).

Exercice III.13. Évaluer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice III.14. Une sorte de réciproque au corollaire I.5.3, qui permet de trouver des coordonnées barycentriques pour un point défini géométriquement. Ici O est barycentre de $((A, \sin(2A)), (B, \sin(2B)), (C, \sin(2C)))$.

Exercice III.15. Les bissectrices des angles en A et B se coupent en un point I. Celui-ci est équidistant de CA et de CB et donc est sur une des bissectrices de ces deux droites. Il est dans le secteur convexe défini par l'angle en A et dans celui défini par l'angle en B, il est donc à l'intérieur du triangle et donc sur la bissectrice *intérieure* de l'angle en C. Raisonnement analogue pour le cercle exinscrit.

Exercice III.16. On a $AV = AW$, $BU = BW$ et $CU = CV$. Nommons ces longueurs respectivement x, y et z. On a

$$\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} \cdot \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} \cdot \frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = \left(-\frac{y}{z}\right)\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right) = -1.$$

L'existence du point de Gergonne est donc une conséquence immédiate du théorème de Ceva.

Exercice III.17. Voir la figure A, où tous les triangles tels que aBC, bCD, *etc.* ont le même cercle inscrit.

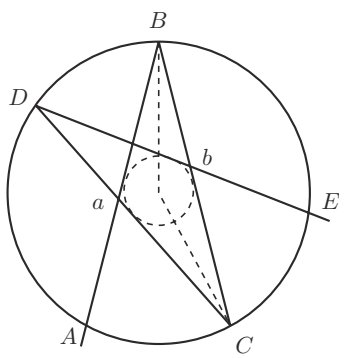


Figure A

Exercice III.18. Utiliser la réflexion par rapport à la médiatrice de AB et les propriétés des angles.

Exercice III.19. Le théorème de l'angle inscrit et la symétrie par rapport à IJ donnent l'égalité d'angles de droites

$$(AB, AI) = (AI, AC).$$

Donc la droite AI est une bissectrice de l'angle en A du triangle ABC. Les points A et I sont de part et d'autre de la droite BC. Celle-ci coupe donc le *segment* AI en un point K. Comme AI est une corde de $\mathcal{C}$, le point K est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$, il est donc sur le segment BC. Ainsi AI est celle des bissectrices qui rencontre le segment BC, c'est la bissectrice intérieure.

Exercice III.20. Supposons que le triangle ABC ne soit pas rectangle (sinon il n'y a rien à démontrer). Par symétrie, on a l'égalité d'angles de droites

$$(DB, DC) = (HC, HB)$$

et par la relation de Chasles,

$$(HC, HB) = (HC, AB) + (AB, AC) + (AC, HB).$$

Comme HC est perpendiculaire à AB et HB à AC, on en déduit l'égalité d'angles de droites

$$(DB, DC) = (AB, AC)$$

donc A, B, C et D sont cocycliques.

On suppose maintenant que les angles du triangle sont aigus. Les pieds des hauteurs D', E' et F' sont alors situés à l'intérieur des segments BC, CA et AB. Ils sont les images des points D, E et F par l'homothétie $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$. On a

$$CD = CH = CE$$

donc C est sur la médiatrice de DE. On va appliquer le résultat de l'exercice III.19. Il faut donc vérifier que C et F ne sont pas du même côté de DE.

Les points E' et D' sont situés de part et d'autre de la hauteur CF', grâce à l'homothétie $h_{H,2}$, les points E et D sont de part et d'autre de CF'. Donc la droite CF coupe le segment ED en un point intérieur au cercle, qui est donc intérieur au segment FC.

Exercice III.21. Pour l'existence, on peut utiliser la compacité des segments AB, BC et CA et la continuité de la fonction qui, à (P, Q, R), associe $PQ+QR+RP$.

Minimiser le périmètre de PQR revient à minimiser la longueur de la ligne brisée

$$R_1R + RQ + QQ_1.$$

Les quatre points doivent être alignés *dans l'ordre* R_1RQQ_1.

Comme les angles en B et C sont aigus, R_1 et Q_1 sont du même côté de BC que A. Comme l'angle en A est aigu, R_1Q_1 coupe les *demi*-droites AB et AC d'origine A. Ainsi R et Q sont sur les segments AB et AC.

Pour déterminer P : le triangle AR_1Q_1 est isocèle en A et son angle au sommet est le double de celui de ABC. On minimise donc R_1Q_1 en minimisant $AR_1 = AP$, ce qui fait que P doit être le pied de la hauteur.

Pour la fin, utiliser l'exercice III.20.

Exercice III.23. Si AP est une bissectrice de l'angle en A, on considère l'autre bissectrice AQ et les projetés orthogonaux B' et C' de B et C sur AQ. On vérifie que

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB'}{AC'}$$

(puisque les droites PA, CC' et BB' sont parallèles) et que

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$$

(puisque les triangles rectangles ABB' et ACC' sont semblables).

Exercice III.24. On peut par exemple (comme c'est suggéré dans [**5**]) démontrer le dernier cas d'égalité en envoyant A sur A' et B sur B' par une isométrie et ajuster, puis démontrer les deux autres en utilisant les relations métriques dans le triangle (exercices III.12 et III.13).

Exercice III.26. La somme des angles des rotations est un angle plat, donc la composée est une symétrie centrale. Appelons I le point de contact du cercle inscrit avec BC et K son point de contact avec BA. La rotation de centre C envoie J sur I, celle de centre B envoie I sur K et celle de centre A ramène K sur J. Donc J est fixe et est donc le centre de la symétrie.

Exercice III.28. La réflexion par rapport à la médiatrice commune de AB et CD (qui passe par O) envoie A sur B, C sur D et laisse O à sa place. Donc

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}).$$

Ce qu'on applique ensuite, d'abord aux deux cordes M_0M_1 et M_3M_4,

$$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_3}) = (\overrightarrow{OM_4}, \overrightarrow{OM_1}),$$

puis à M_4M_5 et M_1M_2,

$$(\overrightarrow{OM_4}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_5}),$$

et enfin à M_2M_3 et M_5M_6,

$$(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_5}) = (\overrightarrow{OM_6}, \overrightarrow{OM_3}),$$

de sorte que

$$(\overrightarrow{OM_6}, \overrightarrow{OM_3}) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_3})$$

et donc que $M_6 = M_0$.

Exercice III.29. On a $(TB, TM) = (CB, CT)$ (le théorème de l'angle inscrit, avec une tangente) et ce dernier angle de droites est égal à (NB, NM) puisque NM est parallèle à CT, finalement $(TB, TM) = (NB, NM)$ donc les quatre points sont cocycliques.

Exercice III.30. Les deux points E et F sont sur le cercle de diamètre AB, donc

$$(EB, EF) = (AB, AF) = (AB, AC).$$

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$. Compte-tenu de ce qui précède, cette égalité d'angles de droites est équivalente à

$$(DB, DC) = (AB, AC) = (EB, EF) = (DB, EF),$$

qui est elle-même équivalente au fait que EF soit parallèle à DC.

Exercice III.31. On écrit les égalités d'angles de droites

$$\begin{aligned}(AB, AA') &= (B'B, B'A')\\ (CC', CB) &= (B'C', B'B)\\ (CD, CC') &= (D'D, D'C')\\ (AA', AD) &= (D'A', D'D)\end{aligned}$$

et $(CB, CD) = (AB, AD)$ si l'on suppose A, B, C et D cocycliques. On ajoute membre à membre ces cinq égalités pour obtenir $(B'A', B'C') = (D'A', D'C')$, qui donne la cocyclicité de A', B', C' et D'.

Exercice III.32. À cause des angles droits, le cercle de diamètre MC contient les points P et Q et le cercle de diamètre MB passe par P et R. On a donc, pour tout point M

$$(PM, PQ) = (CM, CQ) = (CM, CA)$$

et

$$(PM, PR) = (BM, BR) = (BM, BA).$$

Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si on a l'égalité $(PM, PQ) = (PM, PR)$, c'est-à-dire si et seulement si les points A, B, C et M sont cocycliques.

Exercice III.33. L'homothétie $h\,(M, 1/2)$ envoie les points P', Q' et R' sur les projetés orthogonaux P, Q et R de M sur les trois côtés. Les points P', Q' et R' sont alignés si et seulement si P, Q et R le sont, c'est-à-dire (exercice III.32) si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC (et la droite de Steiner est parallèle à la droite de Simson $\mathcal{S}_M$).

Soit D le symétrique de l'orthocentre H par rapport à BC, c'est un point de $\mathcal{C}$ (exercice III.20). On suppose que M est distinct de A, B, C et D. La droite MP' recoupe le cercle en un point P'' (égal à M si MP' est tangente à $\mathcal{C}$). On a l'égalité d'angles de droites

$$(HP', MP') = (AP'', AD)$$

d'où l'on déduit que les droites HP' et AP'' sont parallèles.

On montre aussi l'égalité $(AP'', MP') = (\mathcal{S}_M, MP')$. Donc AP'' est parallèle à la droite de Simson et HP' est parallèle à AP''. On en déduit que HP' est la droite de Steiner de M et donc que celle-ci passe par H.

Reste à vérifier que les droites de Steiner des points A, B, C et D passent par H. Or, ce sont les hauteurs pour A, B et C et la parallèle à la tangente en A passant par H dans le cas de D.

Exercice III.34. Les cercles circonscrits aux triangles $AB'C'$ et $BC'A'$ se coupent en C' et en un deuxième point P. Montrons que celui-ci est aussi sur le cercle circonscrit à $CA'B'$. On a

$$\begin{aligned}(PA', PB') &= (PA', PC') + (PC', PB') \\ &= (BA', BC') + (AC', AB') \text{ cocyclicité} \\ &= (CA', CB') \text{ la somme des angles du triangle est un angle plat...}\end{aligned}$$

d'où la cocyclicité recherchée.

Exercice III.35. Le sommet C se déduira de B par une rotation de centre A et d'angle $\pm\pi/3$, il est donc sur l'image D_1' de D_1 par une telle rotation. Pour construire D_1', on peut projeter A en A_1 sur D_1, tracer le cercle de centre A passant par A_1, la médiatrice de AA_1 et la droite D_1' est l'une des deux tangentes au cercle en l'un de ses points d'intersection avec ladite médiatrice. Le point C est alors le point d'intersection de D_1' et de D_2, on construit ensuite B sans difficulté.

Exercice III.37. Soit O le milieu de BD. On vérifie que la rotation de centre O et d'angle $\pm\pi/2$ envoie P sur S donc $OP = OS$ et $OP \perp OS$. De même $OQ = OR$ et $OQ \perp OR$, donc la rotation vectorielle associée envoie $\overrightarrow{PR}$ sur $\overrightarrow{SQ}$.

Ainsi les diagonales de $PQRS$ sont orthogonales et ont même longueur. Pour que $PQRS$ soit un carré, il faut et il suffit qu'elles se coupent en leur milieu. Appelons α et β les milieux des diagonales PQ et RS, ω le milieu de AC. On remarque que le quadrilatère $O\beta\omega\alpha$ est un carré. Donc $PQRS$ est un carré si et seulement si $\beta = \alpha$ c'est-à-dire si et seulement si $O = \omega$, c'est-à-dire si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice III.38. La droite OP est la médiatrice de AF mais aussi celle de EB donc celle de $E'B'$, donc le triangle $PB'E'$ est isocèle de sommet P. Le triangle OAB est équilatéral et sa médiane AB' est perpendiculaire à BO. Donc P et B' sont sur le cercle de diamètre OA et on a

$$(PB', PO) = (AB', AO)$$

donc l'angle au sommet du triangle isocèle $PB'E'$ a $\pi/3$ pour mesure et donc ce triangle est équilatéral. En plus, on a

$$\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{E'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$$

et donc

$$B'M' = E'N \text{ et } (\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{E'N}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{3} \mod 2\pi.$$

La rotation vectorielle d'angle $\pi/3$ envoie $\overrightarrow{B'M}$ sur $\overrightarrow{E'N}$. La rotation de centre P et d'angle $\pi/3$ envoie B' sur E' et donc M sur N d'où l'on déduit que PMN est équilatéral.

On peut aussi traiter cet exercice en utilisant les nombres complexes et la caractérisation des triangles équilatéraux (directs) par « $a + bj + cj^2 = 0$ ».

Exercice III.39. Avec l'hypothèse faite sur les angles, le point F est à l'intérieur du triangle.

Soit M un point quelconque. Alors $MA+MB+MC$ est la longueur de la ligne brisée $C'M' + M'M + MC$ où M' est l'image de M par une rotation de centre B et d'angle $\pm\pi/3$. On en déduira que, s'il y a une solution, elle est en F.

Exercice III.40. On a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ de mesure θ, donc O est sur l'arc capable correspondant. On a aussi $OA'/OA = k$, donc O est sur un cercle centré sur la droite AA', le centre O cherché est le point d'intersection de l'arc et du cercle.

Exercice III.42. Considérer le triangle (semblable aux autres) Abc, où b est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, ainsi que son orthocentre h. Les triangles ABb et ACc sont semblables, donc C est sur la perpendiculaire à Ac en c de même H est sur la perpendiculaire à Ah en h.

Exercice III.43. Considérer les projetés orthogonaux m et m' de S sur D et D', le centre ω du cercle correspondant, les points de contact t et t' des tangentes issues de S. Si O est le milieu de MM', il est l'image de ω par une similitude de centre S qui envoie m sur M et m' sur M'. En déduire que $S\omega O$ et StT sont semblables et finalement que T et T' sont sur ωt et $\omega t'$.

Exercice III.45. On pourra considérer les points A et A' diamétralement opposés à I sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement ainsi que M', le deuxième point d'intersection de MJ avec $\mathcal{C}'$. On vérifiera que $\sigma(A) = A'$ et que les triangles IMM' et IAA' sont semblables. Le point P, quant à lui, est sur le cercle de diamètre IJ.

Exercice III.47. Observer que B' et C' sont sur le cercle de diamètre BC pour avoir la relation... qui dit aussi que α est sur l'axe radical du cercle circonscrit à ABC et de son cercle d'Euler.

Exercice III.48. Les points S, D et E sont alignés sur les côtés de PQR, de même A, S et T d'une part et U, B et C de l'autre. Le théorème de Menelaüs donne donc

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SR}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{EQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{TR}}{\overline{TP}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{UP}}{\overline{UQ}} = 1.$$

De plus, on a $\overline{RA} \cdot \overline{RB} = \overline{RC} \cdot \overline{RD}$ (c'est la puissance de R par rapport au cercle) et de même

$$\overline{PE} \cdot \overline{PF} = \overline{PD} \cdot \overline{PC} \text{ et } \overline{QE} \cdot \overline{QF} = \overline{QB} \cdot \overline{QA},$$

ce dont on déduit que

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SR}} \cdot \frac{\overline{TR}}{\overline{TP}} \cdot \frac{\overline{UP}}{\overline{UQ}} = 1$$

et le résultat espéré, toujours grâce à Menelaüs.

Exercice III.50. La composée de deux inversions de même pôle est une homothétie, pas une inversion. Les inversions ne forment donc pas un groupe.

Pour la conjugaison, on peut faire un petit calcul en nombres complexes. On peut aussi raisonner géométriquement. On suppose (ça suffit !) que la puissance p de l'inversion $I = I_{O,p}$ est positive, soit $\mathcal{C}$ le cercle d'inversion. On conjugue I par $I' = I_{\Omega,k}$. Soient A et B un point du plan et son image par I. Tout cercle $\mathcal{S}$ passant par A et B est orthogonal à $\mathcal{C}$ (proposition III.4.12). Son image $\mathcal{S}'$ par I', cercle passant par les images A' et B' de A et B est orthogonale à $I'(\mathcal{C})$. On en déduit que A' et B' sont transformés l'un de l'autre par une inversion de cercle $I'(\mathcal{C})$. La conjuguée $I' \circ I \circ I'$ est une inversion de cercle $I'(\mathcal{C})$.

Le pôle est le centre de ce cercle, qu'on détermine facilement : soit $J = I(\Omega)$, on a

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = p = \overline{O\Omega} \cdot \overline{OJ}$$

donc le cercle ΩAB passe par J, donc la droite $A'B'$ (sa transformée par I') passe par $J' = I'(J)$, qui est le pôle (ceci étant vrai pour tous les points A et $B = I(A)$). On détermine la puissance par un calcul utilisant ces points, on trouve

$$\frac{k^2 p}{(O\Omega^2 - p)^2}.$$

Voir par exemple [**16**].

Exercice III.51. Soit O le pôle de l'inversion. Si A, A' et B sont alignés, B est sur la droite OAA' donc B' aussi. Sinon, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ est la puissance de O par rapport au cercle $AA'B$, c'est aussi la puissance de l'inversion et donc aussi $\overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, donc B' est aussi sur ce cercle.

Exercice III.54. Soit Δ la perpendiculaire à D passant par O. La réflexion σ d'axe Δ commute avec l'inversion $I_{O,k}$, on a donc

$$I_{O,k} \circ \sigma(D) = I_{O,k}(\mathcal{C}) = \mathcal{C},$$

donc aussi

$$\sigma \circ I_{O,k}(D) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C},$$

de sorte que Δ est un diamètre de $\mathcal{C}$. La tangente est donc la parallèle à $\mathcal{C}$ passant par O.

Exercice III.56. Il *faut* faire une figure. Le point C est fixe, le cercle est transformé en la tangente en C, les côtés AB et AD sont préservés, ils coupent la tangente en les images B' et D' de B et D, les droites BC et DC sont transformées en les cercles de diamètres AB' et AD'... et toutes les assertions se justifient très facilement.

Exercice III.57. Elle a beaucoup de défauts : elle n'est pas définie partout, elle ne préserve pas l'alignement, elle n'est pas involutive !

Exercice III.58. En général, il y a une inversion de pôle O qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ si et seulement si il y a une homothétie de centre O qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

Exercice III.59. Le pôle est un des points d'intersection des cercles de diamètres AC et BD.

Exercice III.60. Soient O et O' les centres des cercles, A un de leurs points d'intersection. Dans le triangle $OO'A$, on a la relation

$$d^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos A$$

et on conclut par conservation des angles.

Exercice III.61. On pourra considérer les images A', B' et C' de A, B et C par une inversion de pôle D. On montrera qu'il y a égalité si et seulement si les points A', B' et C' sont alignés dans cet ordre... et que ceci équivaut à la cocyclicité de A, B, C et D « dans cet ordre » (c'est-à-dire au fait que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible et convexe).

Exercice III.62. Considérer l'image de la droite MM' par l'inversion de pôle I et de puissance $\overline{PA} \cdot \overline{PM}$, qui est un cercle centré sur Δ et passant par A et A'.

Exercice III.64. C'est un cercle du faisceau engendré par les deux cercles (l'axe radical si $k = 1$).

Exercice III.66. Soit M un point du plan, en dehors de l'axe radical Δ de $\mathcal{F}$. On choisit un point P sur Δ. Sur la droite PM, il y a un unique point M' tel que $\overline{PM} \cdot \overline{PM'}$ soit la puissance de P par rapport aux cercles du faisceau $\mathcal{F}$. Le centre du cercle recherché est le point d'intersection de la médiatrice de MM' avec la droite des centres de $\mathcal{F}$.

Exercice III.67. On peut se ramener au cas facile où les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont concentriques (et où une rotation donne le résultat) en utilisant une inversion (voir les propriétés de l'inverse d'un faisceau).

Exercice III.68. Si O est un point du plan et H son projeté orthogonal sur la droite D, l'image $I_{O,k}(D)$ est un cercle de diamètre OH_1 où H_1 est le point de OH tel que $\overline{OH} \cdot \overline{OH_1} = k$. Si D' est une autre droite, en considérant $I_{O,k}(D')$, on en déduit que le lieu recherché est formé des deux bissectrices de D et D' (privées du point de concours de D et D').

Les centres des cercles inscrit et exinscrits sont donc les pôles des inversions qui transforment les trois côtés en cercles de même rayon. Soit I un de ces quatre points. Les cercles images des côtés sont centrés en α, β et γ, ils se coupent en I et en les inverses A', B' et C' des sommets. L'inverse du cercle circonscrit à ABC est le cercle circonscrit à $A'B'C'$. On peut ensuite raisonner ainsi : le point I est le centre du cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$, qui a donc le même rayon que les trois autres ; l'homothétie de centre I et de rapport $1/2$ envoie A', B' et C' sur les milieux des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$... donc le rayon du cercle circonscrit à $A'B'C'$ est le double de celui du cercle d'Euler de $\alpha\beta\gamma$ et donc[1] il est égal à celui du cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$ (ouf !).

Jusque-là, on n'a utilisé que les pôles des inversions. Maintenant on fixe la puissance. Soit I le centre du cercle inscrit à ABC, on considère l'inversion de pôle I et de puissance $k = OI^2 - R^2$. Le cercle circonscrit est invariant et tous les cercles images des côtés ont le même rayon R. Soit K le point de contact du cercle inscrit avec le côté BC et soit K' son image. On a $IK' = 2R$ et $\overline{IK} \cdot \overline{IK'} = -2Rr$ d'où l'on déduit la relation cherchée. Les lectrices qui n'en ont pas eu assez peuvent démontrer des relations analogues mettant en jeu les rayons des cercles exinscrits (on peut bien sûr démontrer toutes ces relations de façon plus simple).

Exercice III.71. Pour la fin : si la fonction a une singularité essentielle à l'infini, elle ne peut pas être injective. On montre en effet facilement en utilisant le théorème

[1] À ce stade, je suppose que les lecteurs ont fait une figure.

de Weierstrass que l'ensemble des points atteints une infinité de fois est dense dans $\mathbf{C}$ (voir [**11**]). Sinon, c'est une fraction rationnelle et l'injectivité permet de conclure.

Chapitre IV

Exercice IV.1. Appelons a la longueur et b la largeur du rectangle donné. Il s'agit de construire le nombre $\sqrt{ab}$. On construit les points O, B, C et A alignés dans cet ordre de façon que $OB = b$, $OA = a$ et C est le milieu de AB. Les cercles de diamètre OC et BA se coupent en des points à distance $\sqrt{ab}$ de O.

Exercice IV.2. On trace la parallèle à BC passant par A, la perpendiculaire à BC passant par B et la médiatrice de BC, qui délimitent un rectangle qui a même aire que ABC. On est alors ramené à l'exercice IV.1.

Exercice IV.5. S'il l'était, celui de 20° le serait aussi. Or, nous avons vu qu'il ne l'était pas (proposition IV.3.2).

Exercice IV.8. Dans cette construction, $OL = \dfrac{4+\sqrt{5}}{10} \sim 0{,}6236$, une très bonne approximation de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) \sim 0{,}6235$.

Exercice IV.9. On a $P'(X) = 4X^3 - 1$, qui ne s'annule qu'en $1/\sqrt[3]{4}$, donc P a un unique minimum. Comme $P(0) = -1$, celui-ci est négatif et P s'annule exactement deux fois sur $\mathbf{R}$. Ensuite on obtient la relation en identifiant les coefficients, ce qui donne $a + a' = 0$, $bb' = -1$, $b' + aa' + b = 0$ et $ab' + ba' = -1$, puis en éliminant a' et b', ce qui donne $b^2 - a^2b - 1$ et $a(a^2b + 1) - b + a = 0$, et enfin en éliminant b. Puis, a^2 est racine d'un polynôme de degré 3 dont on vérifie sans mal qu'il est irréductible sur $\mathbf{Q}$ (il n'a pas de racine dans $\mathbf{Q}$), donc a^2 n'est pas constructible et donc a non plus. Pour finir, les deux racines de $X^2 + aX + b$ ont pour somme le nombre non constructible a, donc l'une au moins n'est pas constructible.

Chapitre V

Exercice V.1. On choisit des points $A_i \in \mathcal{D}_i$ (on a nécessairement $A_1 \neq A_2$ puisque les droites ne sont pas coplanaires) et des vecteurs directeurs u_i de ces deux droites. On cherche des points $H_1 \in \mathcal{D}_1$, $H_2 \in \mathcal{D}_2$ tels que H_1H_2 soit perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$. On écrit

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2H_2} = -x_1u_1 + \overrightarrow{A_1A_2} + x_2u_2,$$

de sorte que nos inconnues sont maintenant les deux réels x_1 et x_2. On écrit que le produit scalaire de $\overrightarrow{H_1H_2}$ avec u_1 et u_2 est nul, ce qui mène au système linéaire

$$\begin{cases} \|u_1\|^2 x_1 - (u_1 \cdot u_2)x_2 = \overrightarrow{A_1A_2} \cdot u_1 \\ (u_1 \cdot u_2)x_1 - \|u_2\|^2 x_2 = \overrightarrow{A_1A_2} \cdot u_2, \end{cases}$$

lequel système linéaire nous donne le résultat recherché. Remarquons que le déterminant est $\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - (u_1 \cdot u_2)^2$, qui est nul (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz !) si et seulement si u_1 et u_2 sont colinéaires. Donc, comme nos deux droites ont été supposées non coplanaires le système a une unique solution qui conduit à un unique vecteur $\overrightarrow{H_1H_2} \neq 0$ et donc à une unique perpendiculaire commune.

Ensuite, si M_1 et M_2 sont deux points quelconques de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, avec $\overrightarrow{H_iM_i} = y_iu_i$, on a $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{H_1H_2} + (-y_1u_1 + y_2u_2)$ (somme de deux vecteurs orthogonaux), donc

$$\|M_1M_2\|^2 = \|H_1H_2\|^2 + \|-y_1u_1 + y_2u_2\|^2 \geq \|H_1H_2\|^2$$

avec égalité si et seulement si le deuxième vecteur est nul, c'est-à-dire, puisque u_1 et u_2 sont indépendants, si et seulement si $M_1 = H_1$ et $M_2 = H_2$.

Exercice V.2. À cause de l'unicité de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires, c'est évident... sauf qu'il faut vérifier, par exemple, que Δ_2 et Δ_3 ne sont pas coplanaires. Supposons donc qu'elles le soient (leur plan contient alors aussi $\mathcal{D}_1$), alors $\mathcal{D}_2$ est perpendiculaire à Δ_3, donc à ce plan et $\mathcal{D}_3$ est perpendiculaire à Δ_2, donc elles sont toutes les deux perpendiculaires à un même plan, donc elles sont parallèles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exercice V.4. Appelons u_1 un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}_1$ et u_2 un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}_2$, de sorte que ces deux vecteurs sont indépendants. Appelons encore A_i, *etc.* la projection de A sur $\mathcal{P}_i$ (*etc.*). On a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \lambda_1 u_1 = \overrightarrow{A_2B_2} + \lambda_2 u_2,$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C_1D_1} + \mu_1 u_1 = \overrightarrow{C_2D_2} + \mu_2 u_2.$$

Si l'hypothèse était que $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$ et $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$, on aurait

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = (\lambda_1 - \mu_1)u_1 = (\lambda_2 - \mu_2)u_2,$$

ce qui impliquerait que ce vecteur serait nul, donc que $ABCD$ était un parallélogramme. Mais ce pourraient être les projections dans l'ordre $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2C_2B_2D_2$ qui sont des parallélogrammes. On ne peut donc pas conclure ainsi. Et heureusement, parce qu'il est bien facile de trouver un contre-exemple : il suffit

de choisir convenablement A, B, C et D parmi les sommets d'un parallélogramme, comme sur la figure B et de les projeter sur les faces.

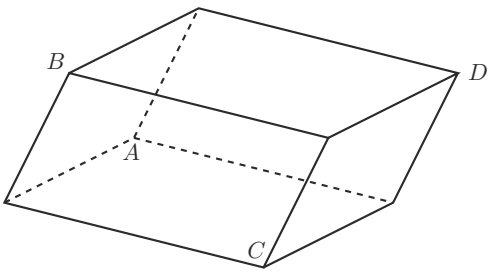


Figure B

Exercice V.5. Commençons par résoudre l'exercice analogue dans le plan : on donne trois points A, B et C non alignés, on demande combien il y a de droites qui sont à égale distance de ces trois points. Les droites équidistantes de A et B sont les parallèles à AB et les droites passant par le milieu de AB (par exemple parce que ce sont les tangentes communes aux cercles de même rayon centrés en A et B). Ensuite, une droite équidistante de A, B et C doit être parallèle à l'un des côtés du triangle et passer par les milieux des deux autres (et justement, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième), il y a donc trois telles droites.

Le cas de l'espace est analogue. Les plans équidistants de A et B sont les plans parallèles à AB et ceux qui passent par le milieu de AB. La réponse à la question posée est « quatre », ce sont les plans parallèles à une face du tétraèdre et passant par les milieux des arêtes joignant les sommets de cette face au quatrième sommet du tétraèdre.

Exercice V.6. On peut en dire que son cosinus est $-1/2$ (parce que la trace de la matrice est à la fois 0 et $2\cos\theta + 1$). Et c'est tout. Sur la rotation elle-même, on peut tout dire : son axe est la droite $x = y = z$ (le vecteur $(1, 1, 1)$ est invariant) et elle est d'ordre 3 (elle permute les trois vecteurs de la base dans laquelle est écrite la matrice).

Exercice V.9. Soit M un point de l'axe D de la rotation ρ. On suppose que $\rho \circ t = t \circ \rho$, on a donc $\rho(t(M)) = t(M)$ donc $t(M)$ est fixé par ρ et donc $t(M) \in D$, de sorte que le vecteur $\overrightarrow{Mt(M)}$ de la translation t dirige l'axe D de la rotation ρ.

On sait d'ailleurs (principe I.3.19) que la conjuguée $\rho \circ t_v \circ \rho^{-1}$ de la translation t_v est la translation de vecteur $\overrightarrow{\rho}(v)$. Donc cette conjuguée est égale à t_v si et seulement si $\overrightarrow{\rho}(v) = v$, ce qui est bien dire que le vecteur de la translation dirige

l'axe de la rotation... ce qui redémontre l'implication déjà démontrée et donne la réciproque.

Exercice V.11. Utiliser le résultat vectoriel. On vérifie aisément : si la composée est une translation, les axes sont parallèles ; si c'est une rotation, les axes ont un point commun et sont donc sécants, et en particulier coplanaires... si les axes ne sont pas coplanaires, la composée est un vissage.

Exercice V.12. Il est évident, par définition des symétries orthogonales, que $-s_P$ est une symétrie par rapport à la droite $P^\perp$. Ensuite, si D et D' sont des droites, on a

$$s_{D'} \circ s_D = s_{P'} \circ s_P,$$

où P et P' sont les plans orthogonaux à D et D' et donc c'est une rotation d'axe $P \cap P'$. Pour que la composée des deux demi-tours soit un demi-tour, il est donc nécessaire (et suffisant) que P et P' soient orthogonaux, c'est-à-dire que les droites D et D' soient orthogonales, l'axe du demi-tour composé est alors la droite perpendiculaire à D et D'.

Que les demi-tours soient conjugués est une conséquence du principe de conjugaison :

$$f \circ s_D \circ f^{-1} = s_{f(D)},$$

donc, pour conjuguer s_D et $s_{D'}$, il suffit d'utiliser une rotation qui envoie D sur D'.

Exercice V.15. Il y a une réflexion qui envoie u_1 sur v_1 (par rapport au plan médiateur de u_1 et v_1), le vecteur u_2 est envoyé sur un autre vecteur unitaire v_2', avec

$$\left\|v_1 - v_2'\right\| = \|u_1 - u_2\| = \|v_1 - v_2\|.$$

Le plan médiateur de v_2 et v_2' contient donc v_1, la réflexion par rapport à ce plan fixe v_1 et envoie v_2' sur v_2. La composée des deux réflexions utilisées est une rotation vectorielle et a les propriétés voulues.

Exercice V.16. La composée r de rotations est une rotation, le point A est fixe donc son axe passe par A. Le point C' du plan BCD défini par $\overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{DC}$ est fixe (en utilisant le fait que les arêtes AB et CD sont orthogonales). Donc l'axe est AC'.

Reste à déterminer l'angle de la rotation, ce qui est bien décomposé dans l'énoncé de l'exercice, où l'on montre que l'image de B est le point B_2 défini par $\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{CB}$ et où l'on vérifie que BHB_2 est un triangle rectangle en H, ce dont on déduit que l'angle cherché est $\pm\pi/2$.

Exercice V.18. Si v et w sont colinéaires, c'est facile. Sinon, il est clair que le résultat du calcul est un vecteur du plan engendré par v et w. Le plus simple est alors de choisir une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) telle que

$$e_1 = \frac{1}{\|v\|}v, \quad \langle e_1, e_2\rangle = \langle v, w\rangle$$

et de calculer dans cette base.

Exercice V.20. Les triangles GAB, GBC et GCA ont même aire parce que les coordonnées barycentriques de G sont $(1, 1, 1)$... mais on peut aussi résoudre cet exercice en transformant ABC en un triangle équilatéral par une application affine de déterminant 1 (et qui préserve donc les aires) !

Exercice V.21. Si P est en B, en C ou au milieu I de BC, une des médianes du triangle convient. Sinon, supposons par exemple que P est sur le segment BI et soit Q un point de AC tel que la droite PQ soit solution du problème, l'aire de CPQ est la moitié de celle de ABC, donc

$$\overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA}$$

et ensuite

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA}}{2\overline{CP}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CP'}}$$

où P' désigne le symétrique de P par rapport à B. Donc AP' est parallèle à BQ. On en déduit la construction demandée.

Exercice V.22. Les aires des triangles AIB, BIC et CIA sont respectivement $rc/2$, $ra/2$ et $rb/2$ (où r est le rayon du cercle inscrit), donc I est le barycentre de $((A, a), B, b), (C, c))$.

Exercice V.23. Appelons A_1,...,A_n les sommets du polygone (dans l'ordre) et O le centre du cercle. Si les côtés sont égaux, les triangles OA_iA_{i+1} sont tous isométriques et les angles sont égaux aussi (en particulier, le pentagone de Dürer, dont tous les côtés sont égaux mais qui n'est pas régulier n'est pas inscriptible). Si les angles sont égaux, les arcs A_2A_n et A_3A_1 ont la même longueur, donc, en leur retirant l'arc A_3A_n, on a égalité des arcs (et aussi des cordes !) A_2A_3 et A_nA_1. Ainsi, si A, B, C et D sont quatre sommets consécutifs, on a $AB = CD$ (comme dans un rectangle !). Si n est impair, tous les côtés ont donc la même longueur.

Exercice V.27. La figure 16 illustre la propriété demandée... mais on peut, pour la démontrer, regarder aussi la figure 17.

Exercice V.28. Toute isométrie qui préserve le cube transforme un des deux tétraèdres en un des deux tétraèdres. Le groupe de celles des isométries du cube qui préservent l'un des tétraèdres est d'indice 2 (il y a effectivement des isométries qui les échangent). De plus, toute isométrie qui préserve ce tétraèdre s'étend en une isométrie du cube, donc le groupe des isométries qui préservent le tétraèdre régulier (abstrait) est un sous-groupe d'indice 2 dans le groupe des isométries du cube.

Exercice V.29. Si A' et B' sont les images des deux sommets A et B du tétraèdre par une isométrie, on a $A'B' = AB$. Si en plus l'isométrie conserve le tétraèdre, A' et B' doivent être des points de ce tétraèdre. Mais la longueur AB est la plus grande distance possible entre deux points du tétraèdre et elle n'est réalisée par deux points que si ceux-ci sont des sommets. Donc A' et B' sont des sommets du tétraèdre.

L'homomorphisme envoie une isométrie sur la permutation des sommets qu'elle détermine. Il est injectif parce qu'une application affine est bien déterminée par l'image d'un repère affine. Comme la réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête réalise la transposition des extrémités de cette arête, l'image de notre homomorphisme contient toutes les transpositions. Comme celles-ci engendrent le groupe symétrique, l'homomorphisme est surjectif.

Exercice V.32. Il est facile de faire la liste des déplacements qui préservent un cube, mais un peu moins simple de démontrer qu'on n'a rien oublié. La considération des deux tétraèdres donne « gratuitement » l'ordre du groupe et autorise donc à s'arrêter quand on a trouvé vingt-quatre déplacements.

La longueur d'une grande diagonale est la plus grande distance possible entre deux points du cube, c'est pourquoi les isométries préservent l'ensemble des grandes diagonales. On a ainsi un homomorphisme φ du groupe des isométries du cube dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Il est clair que φ n'est pas injectif : la réflexion qui échange deux faces parallèles fixe chacune de ces grandes diagonales. Montrer que φ définit quand même un isomorphisme du groupe des déplacements dans $\mathfrak{S}_4$ est un exercice un peu fastidieux. Ici on connaît l'ordre du groupe des déplacements et il suffit d'exhiber un déplacement qui définit une transposition des grandes diagonales pour avoir la surjectivité de φ... et aussi son injectivité.

Exercice V.33. Une isométrie qui préserve le tétraèdre envoie deux arêtes opposées sur deux arêtes opposées et aussi la perpendiculaire commune au premier couple sur la perpendiculaire commune au deuxième. Comme il y a trois tels couples, on a bien un homomorphisme de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$. La réflexion autour du plan médiateur de AB fixe C et D et échange A et B, elle fixe donc la perpendiculaire

commune à AB et CD et elle échange les deux autres. Ainsi les transpositions, qui engendrent $\mathfrak{S}_3$, sont dans l'image et notre homomorphisme est surjectif. Le demi-tour autour de la perpendiculaire commune à AB et CD, lui, correspond au produit des transpositions de A et B et de C et D dans $\mathfrak{S}_4$ et il fixe chacune des trois perpendiculaires communes. Le noyau, dont nous savons qu'il a $4!/3! = 4$ éléments, contient donc les quatre éléments en question et est donc bien le sous-groupe espéré. Une autre description géométrique du même homomorphisme est donnée dans l'exercice VI.27.

Un homomorphisme surjectif $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n-1}$ aurait comme noyau un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ à n éléments. Pour $n \geq 5$, le seul sous-groupe distingué[(2)] de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$, qui a $n!/2 > n$ éléments. La situation décrite ici d'un homomorphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ est donc exceptionnelle.

Exercice V.34. Appelons S le pôle sud. Je conseille aux lecteurs de faire une figure dans le plan NSM. Soit $\mathcal{P}'$ le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par S et soit μ le point d'intersection de la droite NM avec $\mathcal{P}'$. On a

$$\overline{Nm} \cdot \overline{N\mu} = NS^2 = 4R^2$$

et

$$\overline{Nm} \cdot \overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{Nm} \cdot \overline{N\mu} = 2R^2$$

(l'homothétie de centre N et de rapport $1/2$ envoie $\mathcal{P}'$ sur $\mathcal{P}$, je suis en train de recopier la démonstration de la proposition III.4.8).

Donc φ est bien la restriction d'une inversion, ce qui fait qu'elle est continue, il est clair qu'elle est inversible... et son inverse est la restriction à $\mathcal{S} - \{N\}$ de la même inversion, elle est donc aussi continue.

Pour la deuxième partie, on remarque que les triangles OMN et ONM' sont semblables et on en déduit l'égalité

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = ON^2 = R^2.$$

Exercice V.36. Il faut avoir choisi une origine pour pouvoir définir la longitude ! Par contre, la *différence de deux longitudes* est indépendante de l'origine choisie. Avec sa montre à l'heure de Washington, Gédéon Spilett est capable de mesurer la différence entre la longitude de l'île et celle de Washington. Les héros du « Pays des fourrures » ont certainement mesuré leur latitude... mais la hauteur du soleil ne leur a rien appris sur leur longitude.

(2) Voir [**39**], par exemple.

Exercice V.37. L'existence du point M_0 et la positivité de d sont dus à la continuité de la fonction et à la compacité de son espace de départ. Ensuite le point A est du côté « $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM_0} < \dfrac{d^2}{2}$ » et il suffit de vérifier que C est de l'autre. On suppose au contraire qu'il y a un point M dans C qui vérifie

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0A} \geq \frac{d^2}{2}.$$

Si N est un point du segment M_0M à distance ε de M_0, N est dans C (on utilise la convexité) et, en utilisant les relations métriques dans le triangle AM_0M, on vérifie que, pour ε assez petit, on a $AN^2 < d^2$, ce qui est contraire à la définition de d.

Exercice V.38. Il est clair que $\check{C}$ est un convexe, puisque c'est une intersection de demi-espaces. Comme 0 est dans l'intérieur de C, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la boule fermée $B(0, \varepsilon)$ de centre 0 et de rayon ε est contenue dans C. On a alors

$$\check{C} \subset B\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

En effet, si $u \in \check{P}$, on a $u \cdot v \leq 1$ pour tout v de P et en particulier pour tout v de $B(0, \varepsilon)$. En utilisant $v = \varepsilon u \, \|u\|$, on en déduit l'inégalité $\|u\| \leq 1/\varepsilon$ recherchée.

On a clairement, par définition, l'inclusion $C \subset \check{\check{C}}$. Pour l'inclusion inverse, on considère un point A hors de C, on montre qu'il n'est pas dans $\check{\check{C}}$ en le séparant de C par un plan comme nous y autorise l'exercice V.37.

Si P est l'enveloppe convexe de l'ensemble fini $\{B_1, \ldots, B_N\}$, on écrit $v = \overrightarrow{OM} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OB_i}$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum \lambda_i = 1$, de sorte que l'on a

$$\check{P} = \bigcap_{i=1}^{N} \left\{ u \in E \mid u \cdot \overrightarrow{OB_i} \leq 1 \right\}.$$

Alors $\check{P}$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. C'est un polyèdre convexe grâce à la caractérisation donnée dans la proposition V.4.3 et au fait que nous savons qu'il est borné.

Exercice V.40. Soit d la distance du centre O aux faces de P et soient $M_1, \ldots, M_F$ les centres de ses faces. Les faces de P sont les plans d'équations $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM_i} = d^2$, les points de P sont les points M vérifiant $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM_i} \leq d^2$. Le dual de P', quant à lui, est le polyèdre défini par les inéquations

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM_i} \leq 1.$$

Il ne reste qu'à utiliser l'homothétie de centre O et de rapport d^2.

Exercice V.41. C'est un parallélogramme. En particulier, son groupe d'isométries est plus gros que celui du quadrilatère de départ, et donc de celui du dual de celui-ci (exercice V.39). Il ne lui est donc pas homothétique.

Exercice V.42. Supposons la salle de bains sphérique carrelée, ou le ballon réalisé avec des morceaux hexagonaux. Chaque face a six arêtes, chaque arête appartient à deux faces, donc $6F = 2A$. Ainsi la relation d'Euler donne

$$F - A + S = \frac{A}{3} - A + S = 2, \quad \text{soit} \quad 3S = 6 + 2A.$$

Le nombre d'arêtes issues de chaque sommet est un nombre r_s (dépendant du sommet s considéré) vérifiant $r_s \geq 3$, donc

$$3S \leq \sum r_s = 2A,$$

ce qui donne la contradiction.

Exercice V.43. La formule d'Euler donne douze pentagones... mais ne dit rien sur le nombre d'hexagones (sur un vrai ballon de football, il y en a vingt). En effet, si m est le nombre d'hexagones et n le nombre de pentagones, on a $F = m + n$, $2A = 6m + 5n$, $3S = 2A$ et la formule d'Euler donne

$$m + n - \frac{6m + 5n}{2} + \frac{6m + 5n}{3} = 2,$$

soit $n = 12$.

Exercice V.44. Transformer la figure par projection stéréographique pour voir un polyèdre dessiné sur une sphère, avec des nombres de sommets, arêtes et faces que l'on évaluera.

Exercice V.45. Il *faut* faire une figure. Les grands cercles définis par xy, xz coupent le plan $x^\perp$ en deux points u et v tels que

$$\begin{aligned} y &= (\cos c)x + (\sin c)u \\ z &= (\cos b)x + (\sin b)v \end{aligned}$$

et $u \cdot v = \cos\alpha$. On évalue $\cos a = y \cdot z$ pour obtenir la formule. On a donc

$$\left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right| < 1, \text{ soit } \cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c)$$

d'où l'on déduit l'inégalité triangulaire. Voir aussi le chapitre 18 de **[5]** pour ces questions sur la sphère.

Exercice V.46. On prolonge φ à E en posant

$$\widetilde{\varphi}(0) = 0 \text{ et } \widetilde{\varphi}(v) = \|v\|\,\varphi\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \text{ si } v \neq 0,$$

on constate que $\widetilde{\varphi}$ préserve le produit scalaire (parce que $x \cdot y = \cos d(x,y)$) puis on utilise l'exercice II.3.

Exercice V.47. Les deux conditions impliquent l'inégalité

$$\left|\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right| < 1.$$

Soit $\alpha \in]0, \pi[$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

On fixe x sur S, on construit deux grands cercles passant par x et faisant l'angle α, on met y et z sur ces cercles à distance b et c de x et la formule de trigonométrie sphérique donne $d(x,y) = a$. Vérifier l'unicité.

Exercice V.48. On dessine un petit triangle équilatéral ABC dans U. Soit M son centre (point d'intersection des médiatrices), point équidistant de A, B et C. Supposons que $f : U \to \mathbf{R}^2$ préserve les distances. Soient A', B', C' et M' les images de A, B, C et M. Alors $A'B'C'$ est équilatéral et M' est son centre. On montre maintenant que les relations métriques dans les deux triangles sont incompatibles :

- dans le triangle « plat », on a $A'B' = \sqrt{3}A'M'$,
- mais dans le triangle sphérique, on a $AB < \sqrt{3}AM$.

Pour démontrer cette inégalité, on applique la formule de trigonométrie sphérique de l'exercice V.45. Posons $a = AB$ et $b = AM$, on a

$$\cos a = \cos^2 b + \sin^2 b \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 b.$$

On veut montrer que $a < \sqrt{3}b$. Pour b assez petit, c'est une conséquence d'un calcul de développement limité basé sur cette formule

$$\cos(\sqrt{3}b) = 1 - \frac{3b^2}{2} + \frac{9b^4}{24} + o(b^5) \text{ et } \cos a = 1 - \frac{3b^2}{2} + \frac{b^4}{2} + o(b^5),$$

qui donne (juste) l'inégalité voulue. Le cas d'un tout petit triangle équilatéral suffit, l'ouvert U étant quelconque (mais l'inégalité est vraie aussi pour les grands triangles).

Exercice V.49. Les indications de l'énoncé devraient être suffisantes, l'existence du triangle équilatéral venant du résultat de l'exercice V.47.

Exercice V.50. La « plus grande simplicité » de cette construction est assez illusoire. Il s'agit du dodécaèdre construit sur le cube de sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ comme dans l'exercice V.49 et sur la figure 19.

Exercice V.52. Utiliser le fait que φ est la restriction à $\mathcal{P}$ d'une inversion (exercice V.34).

Exercice V.53. On utilise l'application

$$\begin{array}{ccc} G^+ \times \{\pm 1\} & \longrightarrow & G \\ (g, \varepsilon) & \longmapsto & \varepsilon g \end{array}$$

qui est un morphisme de groupes parce que $-\operatorname{Id}$ est dans le centre de $\mathrm{O}(3)$, qui est clairement injectif, et qui est surjectif[(3)] parce que $\operatorname{dét}(-\operatorname{Id}) = -1$.

Dans le cas du dodécaèdre, le groupe des isométries contient la symétrie centrale $-\operatorname{Id}$, donc il est isomorphe à $\mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$, contrairement à $\mathfrak{S}_5$ (toujours par le même argument).

Exercice V.54. Voir [**2**] ou [**4**] par exemple.

Exercice V.55. On trouvera toutes les démonstrations et d'autres applications des quaternions par exemple dans [**39, 36, 23, 41**].

Chapitre VI

Exercice VI.4. Le complémentaire d'une droite dans un plan projectif est un plan affine, donc est connexe. Par contre, le complémentaire de $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est le complémentaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et a deux composantes connexes (voir la figure 13).

Exercice VI.6. L'algèbre linéaire, c'est facile !

Exercice VI.7. En écrivant $E = \ell \oplus H$, on identifie les droites de E_H aux graphes des applications linéaires de ℓ dans H.

Exercice VI.8. La séparation vient du fait que l'ensemble des vecteurs unitaires de chaque droite est *compact*.

Exercice VI.9. Soit $f : E \to E$ un isomorphisme linéaire auquel l'homographie g est associée. Un point fixe de g est l'image d'un vecteur propre de f. Les endomorphismes complexes ont des vecteurs propres (à cause de d'Alembert) et les

[(3)] Le même argument fonctionne pour $\mathrm{O}(n)$ et ses sous-groupes quand n est impair et montre en particulier qu'alors, $\mathrm{O}(n)$ est isomorphe à $\mathrm{O}^+(n) \times \{\pm 1\}$... ce qui est faux quand n est pair, les deux groupes n'ayant pas le même centre.

endomorphismes réels des espaces de dimension impaire aussi (pour une raison analogue).

Pour le contre-exemple, il suffit de partir d'un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sans valeur propre réelle, une rotation par exemple. Voici un exemple : $z \mapsto -1/z$ (de quelle rotation provient-elle ?).

Exercice VI.10. La traduction en algèbre linéaire est un cas particulier du fait bien classique (et facile à démontrer) : deux endomorphismes du plan ayant chacun deux vecteurs propres indépendants (c'est-à-dire diagonalisables) commutent si et seulement s'ils ont les mêmes vecteurs propres (c'est-à-dire sont diagonalisables dans la même base).

Exercice VI.11. Les homographies de $\mathbf{P}_1$ qui préservent ∞ sont les transformations affines $z \mapsto az+b$ (avec $a \neq 0$), celles qui préservent aussi 0 sont les isomorphismes linéaires $z \mapsto az$ (toujours avec $a \neq 0$). Le groupe des homographies qui préservent 0 et ∞ est donc isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbf{K}^\star$.

Si a et b sont deux points (distincts), soit g_0 une homographie qui les envoie sur 0 et ∞. Alors g préserve a et b si et seulement si $g_0 g g_0^{-1}$ préserve 0 et ∞. Le groupe des homographies qui préservent a et b est donc conjugué à $\mathbf{K}^\star$ dans $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{K})$, en particulier, il lui est isomorphe.

Exercice VI.13. On choisit une base (e_1, e_2, e_3) de l'espace vectoriel E définissant P de façon que $m = p(e_1)$ et $D = P(\langle e_2, e_3\rangle)$. La droite $m^\star$ est l'image dans $P(E^\star)$ du plan vectoriel $\langle e_2^\star, e_3^\star\rangle$ (formes linéaires s'annulant sur e_1).

Le plan vectoriel de E d'équation $(ae_2^\star + be_3^\star)(u) = 0$ rencontre le plan $\langle e_2, e_3\rangle$ le long de la droite vectorielle engendrée par $(b, -a)$. L'incidence est donc l'homographie associée à l'isomorphisme linéaire

$$\begin{array}{ccc} \langle e_2^\star, e_3^\star\rangle & \longrightarrow & \langle e_2, e_3\rangle \\ (a,b) & \longmapsto & (b,-a). \end{array}$$

Exercice VI.14. Les hyperplans proviennent de deux hyperplans vectoriels F et F', le point m d'une droite vectorielle D. L'hypothèse est que D n'est contenue ni dans F ni dans F'. Soit $f : E \to E$ la projection sur F' parallèlement à D. Elle définit par restriction un isomorphisme

$$f|_F : F \longrightarrow F'$$

... et l'homographie g. La perspective g est aussi composée des applications

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & m^\star \\ x & \longmapsto & mx \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} m^\star & \longrightarrow & H' \\ d & \longmapsto & d \cap H' \end{array}$$

qui sont des incidences (par définition pour la deuxième, par dualité pour la première : on écrit $H = A^\star$ pour $A \in P(E^\star)$, $x \in H$ est une droite de $P(E^\star)$ passant par A et mx son point d'intersection avec $m^\star$).

Exercice VI.15. On vérifie immédiatement $f(B) = B$, $f(M) = A'$, $f(C') = N$, $f(\alpha) = \gamma$ d'une part, et $g(B) = B$, $g(M) = A'$, $g(C') = N$ de l'autre. Donc $g = f$ et donc aussi $g(\alpha) = \gamma$, mais $g(\alpha)$ est le point d'intersection de $\beta\alpha$ et $B'A$ donc, α, β et γ sont alignés.

Exercice VI.16. On pourra choisir une autre sécante D' et montrer qu'il existe une homographie (une perspective) de D dans D' envoyant a_i sur a'_i.

Exercice VI.17. L'incidence $m^\star \to D$ est une homographie (exercice VI.13) qui envoie d_i sur a_i.

Exercice VI.18. On a $[d_1, d_2, d_3, d_4] = [a_1, a_2, a_3, \infty]$.

Exercice VI.20. Le théorème de Menelaüs, appliqué aux points alignés D, B' et C', donne

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1.$$

De plus, pour les quatre points alignés A', B, C, D, on a

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \Big/ \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = [B, C, A', D],$$

donc

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = [C, B, A', D].$$

Exercice VI.21. On obtient, bien sûr, le théorème de Thalès. On a utilisé ici le fait que les perspectives sont des homographies, c'est-à-dire en fin de compte le fait que les projections vectorielles sont des applications linéaires... c'est le même argument qu'au chapitre I (j'espère que nulle n'en doutait).

Exercice VI.22. Si BB', CC' et DD' sont concourantes en m, on a l'égalité des birapports (c'est le birapport des quatre droites mA, mB, mC et mD). La réciproque est conséquence du sens direct.

Exercice VI.23. Soit O le centre de $\mathcal{C}$. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si on a $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$, relation équivalente à la relation désirée, $[A, B, M, N] = -1$.

Exercice VI.24. La construction est indiquée sur la figure. Pour vérifier qu'elle convient, on pourra considérer la situation affine où A est à l'infini ou utiliser des perspectives.

Exercice VI.25. On peut envoyer $\alpha\beta$ à l'infini.

Exercice VI.27. C'est une autre façon de décrire l'homomorphisme exceptionnel $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ déjà rencontré dans l'exercice V.33.

Exercice VI.28. Il n'y a qu'une homographie qui fixe 1 et échange 0 et ∞, c'est $z \mapsto 1/z$. On envoie a, b, c, d dans cet ordre, sur ∞, 0, 1, $[a, b, c, d]$ puis (par $1/z$) sur 0, ∞, 1, $[a, b, c, d]^{-1}$. La composée envoie, dans l'ordre, b, a, c et d sur ∞, 0, 1 et $[a, b, c, d]^{-1}$. Ce dernier nombre est donc $[b, a, c, d]$. Pour montrer directement les deux autres égalités, on peut raisonner de la même façon en utilisant

– l'homographie $z \mapsto [a, b, c, d]^{-1}z$ qui fixe ∞ et 0 et envoie $[a, b, c, d]$ sur 1 pour la première,

– l'homographie $z \mapsto 1 - z$ qui fixe ∞ et échange 0 et 1 pour la seconde.

Exercice VI.30. Soient p et p' deux points distincts échangés par g. Soient q un autre point et q' son image. On veut montrer que $g(q') = q$. On calcule

$$\begin{aligned}[p, p', q, q'] &= [g(p), g(p'), g(q), g(q')] \\ &= [p', p, q', g(q')], \text{ on échange les points dans chaque paire} \\ &= [p, p', g(q'), q'], \text{ d'où le résultat.}\end{aligned}$$

Comme f est une homographie, on a

$$[a_1, a_2, a_3, a'_j] = [a'_1, a'_2, a'_3, f(a'_j)].$$

Donc la condition $[a_1, a_2, a_3, a'_j] = [a'_1, a'_2, a'_3, a_j]$ est équivalente à $a_j = f(a'_j)$. On utilise la propriété précédente.

Traduction en algèbre linéaire : un endomorphisme *involutif* de $\mathbf{R}^2$ qui n'est pas une homothétie et qui a une valeur propre réelle a deux valeurs propres réelles distinctes (on n'utilise pas l'involutivité ici). Soient λ et μ ces valeurs propres. En utilisant une base de vecteurs propres et les formules sur le birapport, on vérifie que, pour tout point m, on a

$$[a, b, m, g(m)] = \frac{\lambda}{\mu}$$

en particulier, ce birapport est constant (on n'a toujours pas utilisé l'involutivité). Le cas où g est involutive est le cas particulier où $\mu = -\lambda$.

Exercice VI.31. L'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est aussi un cercle ou une droite. On détermine donc très facilement les images demandées en déterminant les images de quelques points.

Exercice VI.32. La composée $g_2 \circ g_1^{-1}$ est une homographie, on « recolle » les clichés en utilisant un repère projectif de H (voir le chapitre 4 de [**5**]).

Exercice VI.33. Soient D et D' deux points, a, b et c trois droites passant par D, a', b' et c' trois droites passant par D'. Les droites joignant les points $a \cap b'$ et $a' \cap b$, $a \cap c'$ et $a' \cap c$, $b \cap c'$ et $b' \cap c$ sont concourantes.

Exercice VI.34. C'est une conséquence du théorème de Pappus. Remarquons d'abord que, aussi courte que soit votre règle, elle permet de construire des droites arbitrairement longues. Appelons α et β les deux points que nous souhaitons relier. Grâce à la règle, vous pouvez dessiner deux longues droites passant par α et faisant entre elles un tout petit angle, ainsi que deux droites passant par β avec les mêmes propriétés, les quatre droites ensemble formant un petit quadrilatère. Soient C et C' deux sommets opposés de ce quadrilatère (figure c). Dessinez une droite D passant par C et qui coupe $C'\alpha$ en B et $C'\beta$ en A. Dessinez ensuite de même une droite D' passant par C' et coupant βC en A' et αC en B'. Choisissez les de façon que les points A et B' soient assez proches et de même les points A' et B, de sorte que votre règle vous permet de tracer les droites $A'B$ et AB'. Celles-ci se coupent en un point γ de la droite $\alpha\beta$ (voilà Pappus). Si celui-ci n'est pas assez proche de α, de β, ou des deux, recommencez.

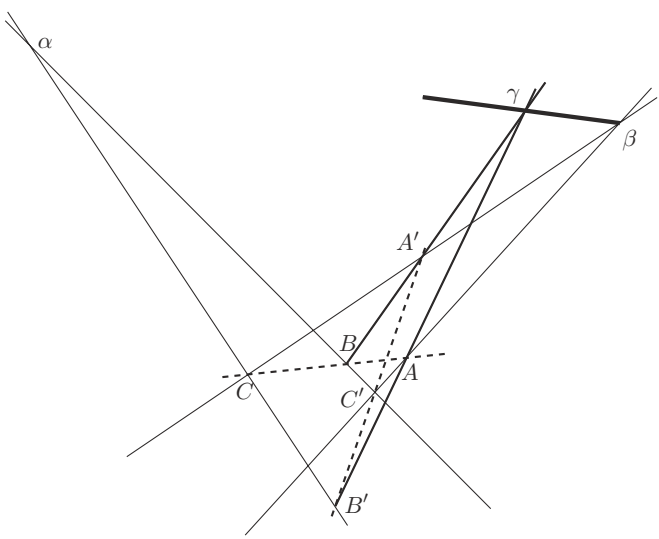


Figure c

Exercice VI.35. Le cardinal de $\mathrm{GL}(2;\mathbf{F}_q)$ est le nombre de bases de l'espace vectoriel $\mathbf{F}_q^2$. On a le choix entre q^2-1 éléments pour le premier vecteur, puis entre q^2-q pour le deuxième, donc $\#\,\mathrm{GL}(2;\mathbf{F}_q) = (q^2-1)(q^2-q)$. Il y a $q-1$ homothéties

(non nulles) donc $\#\,\mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_q) = \dfrac{(q^2-1)(q^2-q)}{q-1} = q(q^2-1)$. Comme toutes les droites projectives, $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_q)$ s'obtient en ajoutant un point à l'infini à la droite affine $\mathbf{F}_q$, elle a donc $q+1$ éléments. Le groupe $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_q)$ opère sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_q)$, en particulier il permute ses $q+1$ points, d'où l'homomorphisme h annoncé.

Si $q=2$, les deux groupes ont six éléments et toute permutation de $\{\infty,0,1\}$ est (réalisable par) une homographie, donc on a un isomorphisme

$$\mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_2) = \mathrm{PSL}(2;\mathbf{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3.$$

Si $q=3$, les deux groupes ont encore le même cardinal, 24. Si σ est une permutation, il existe une unique homographie qui envoie ∞ sur $\sigma(\infty)$, 0 sur $\sigma(0)$ et 1 sur $\sigma(1)$... et elle ne peut pas s'empêcher d'envoyer -1 sur l'élément restant, à savoir $\sigma(-1)$, donc h est encore un isomorphisme.

Si $q \geq 4$, cet argument ne fonctionne plus du tout et l'application h n'est plus surjective. Elle reste bien sûr injective.

L'application dét : $\mathrm{GL}(2;\mathbf{F}_3) \to \{\pm 1\}$ est un homomorphisme surjectif de groupes, le noyau $\mathrm{SL}(2;\mathbf{F}_3)$ est donc un sous-groupe distingué d'indice 2, son cardinal est donc 24. Les homothéties $\pm\,\mathrm{Id}$ sont dans $\mathrm{SL}(2;\mathbf{F}_3)$, donc le cardinal de $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{F}_3)$ est 12. Bien sûr, ce sous-groupe est envoyé sur $\mathfrak{A}_4$, ce qui est conséquence du fait que le déterminant de l'élément de $\mathrm{GL}(2;\mathbf{F}_3)$ et la signature de son image dans $\mathfrak{S}_4$ coïncident. Pour vérifier ce fait, on peut par exemple remarquer que les transpositions $(\infty\ 0)$, $(\infty\ 1)$ et $(\infty\ \ -1)$, qui engendrent $\mathfrak{S}_4$ correspondent aux matrices (de déterminant -1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

Exercice VI.36. Conséquence de VI.18.

Exercice VI.37. On suppose que AP, BQ et CR concourent en un point D, on calcule le birapport des quatre points de d :

$$\begin{aligned}
[P',Q',R',P] &= [AP',AQ',AR',AP] \\
&= [AP',AC,AB,AD], \text{ on intersecte avec } BC \\
&= [P',C,B,D'] \text{ où } D' = AP \cap BC \\
&= [DP',DC,DB,DD'] \\
&= [P',R,Q,P] \text{ en coupant par } d \\
&= [P,Q,R,P']
\end{aligned}$$

et on applique le résultat de l'exercice VI.30. On peut aussi utiliser incidences et perspectives à la place des intersections, c'est strictement équivalent. La réciproque est conséquence du sens direct.

Exercice VI.38. On voit le plan affine euclidien comme sous-espace affine (d'équation $z = 1$) d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3. La droite à l'infini vient du plan vectoriel $z = 0$. Une rotation vectorielle d'angle $\pm\pi/2$ dans ce plan est un isomorphisme qui définit l'homographie en question.

Exercice VI.39. On applique le deuxième théorème de Desargues (exercice VI.37) au triangle ABC et à la droite à l'infini. Les droites AP, BQ et CR sont les hauteurs et les points P', Q' et R' les points à l'infini des côtés du triangle. Ces points se correspondent par la relation d'orthogonalité, qui est une involution (exercice VI.38) donc les hauteurs sont concourantes.

Exercice VI.40. La formule du produit se vérifie directement. Pour l'aspect cubique, dessiner un cube et appeler deux faces parallèles respectivement $A'CB'D$, $AC'BD'$, de façon que AA', BB', CC' et DD' soient les grandes diagonales. Pour les applications, il suffit de fixer soigneusement les notations.

– Pour le théorème de Miquel, il faut changer de notations (à chaque problème sa notation) par rapport à l'énoncé de l'exercice III.31. Les cercles $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en D et C', $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en B et A', $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ en C et D', $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ en A et B'.

– Pour la droite de Simson, projeter un point d du plan sur les trois côtés d'un triangle abc en $a'b'c'$ et noter, dans l'ordre, $ABCDA'B'C'D' = abc'\infty a'b'cd$ pour vérifier que a', b' et c' sont alignés si et seulement si a, b, c et d sont cocycliques.

– Pour le pivot, les notations données dans l'exercice III.34 conviennent (avec D l'autre point d'intersection des cercles $AB'C'$ et $A'BC'$ et avec $D' = \infty$).

Exercice VI.43. Considérer les équations cartésiennes des droites.

Exercice VI.46. On pourra utiliser le résultat affine (voir l'exercice I.67)... ou faire un raisonnement projectif (mais analogue).

Exercice VI.52. Pour en savoir plus sur le demi-plan de Poincaré ou pour des démonstrations des propriétés présentées ici, voir par exemple [**32**]. Pour en savoir encore plus sur la géométrie *hyperbolique*, voir le chapitre 19 de [**5**] et les références qu'il contient.

Chapitre VII

Exercice VII.2. C'est la dimension de l'espace vectoriel des matrices symétriques.

Exercice VII.3. Elle s'écrit comme différence des carrés de *deux* formes linéaires. Son rang est donc ≤ 2.

Exercice VII.5. La forme bilinéaire définie sur $\mathbf{R}^n$ par $\varphi(x,y) = (Ax)\cdot y = {}^t yAx$ est symétrique. Il existe donc, d'après le théorème VII.7.8, une base *orthonormée* qui est orthogonale pour φ. En appelant P la matrice de passage, c'est dire que ${}^tPAP$ est diagonale. Comme P est orthogonale, ${}^tP = P^{-1}$, on a donc trouvé un changement de base P tel que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice VII.6. Utiliser une base de vecteurs propres de l'endomorphisme composé $\widetilde{\varphi}^{-1}\circ\widetilde{\varphi'}$.

Exercice VII.9. Voir la figure 21 ou la figure 4 du chapitre IX.

Exercice VII.13. Pas de différence entre ellipse et hyperbole...

Exercice VII.18. Il n'y a aucune différence entre une ellipse et un cercle du point de vue des applications affines.

Exercice VII.20. On pourra traiter d'abord le cas d'un cercle et constater ensuite que toutes les notions en jeu sont affines.

Exercice VII.21. Le plus joli est d'interpréter géométriquement la condition d'orthogonalité en considérant le cercle de centre O et de rayon a et l'affinité de rapport b/a qui fixe le grand axe de l'ellipse et envoie le cercle sur l'ellipse. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont des diamètres conjugués si et seulement si les points M et M' sont les images de M_1 et M_1' avec $OM_1 \perp OM_1'$. Il n'y a plus qu'à regarder ce qui se passe dans le cas du cercle.

Pour le deuxième théorème, écrire les coordonnées de M et de M' en fonction de θ tel que l'affixe de M_1 soit $e^{i\theta}$.

Exercice VII.24. Une parabole est déterminée par son foyer et sa directrice, c'est-à-dire par un point et une droite ne passant pas par ce point. Cette figure est unique à similitude près (utiliser l'exercice III.9). Les coniques propres qui ne sont pas des cercles sont déterminées par foyer, directrice et excentricité, l'excentricité est invariante par similitude...

Exercice VII.25. Pour une parabole, le groupe est d'ordre 2. Pour une ellipse ou une hyperbole, c'est comme pour un rectangle. Pour un cercle...

Exercice VII.26. Si l'équation de la parabole est $y^2 = 2px$ et si l'abscisse de M est a, les points considérés ont pour coordonnées

$$M\begin{pmatrix} a \\ \varepsilon\sqrt{2pa}\end{pmatrix},\quad N\begin{pmatrix} a+p \\ 0\end{pmatrix},\quad m\begin{pmatrix} a \\ 0\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix} -a \\ 0\end{pmatrix},$$

d'où les résultats demandés (comme quoi, parfois, les coordonnées, c'est simple !). On a $mn = p$ et le milieu de NT est le foyer $F\begin{pmatrix} p/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice VII.27. Le problème est invariant par transformations affines. On peut donc supposer que la parabole a pour équation $y = x^2$. Si les abscisses de M, N, M' et N' sont respectivement a, b, a' et b', le fait que les deux cordes sont parallèles s'écrit

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{a'^2 - b'^2}{a' - b'}, \text{ ou } a + b = a' + b',$$

les deux milieux ont donc la même abscisse, ce que nous voulions démontrer.

Exercice VII.29. Alors c'est le signe de q qui détermine le type de la conique.

Exercice VII.30. La réponse est $\rho = ed/(1 + e\cos\theta)$ avec e l'excentricité et d la distance de F à la directrice.

Exercice VII.32. Un segment, une demi-droite.

Exercice VII.34. Une ellipse, une hyperbole (de foyers F, F')... et une droite si $F' \in \mathcal{C}$.

Exercice VII.36. On peut traiter la première question par un calcul utilisant une équation de $\mathcal{C}$. Pour la deuxième, supposons que MP soit parallèle à une asymptote. Soit N un point de MP, n sa projection sur D et N' sa projection sur PF. Grâce à la première question et au théorème de Thalès, le rapport NN'/NF tend vers 1 quand N tend vers l'infini sur MP. Mais ce rapport est le sinus de l'angle en F dans le triangle rectangle NFN'. Il reste à vérifier que la limite de cet angle est l'angle en P de MPF et que celui-ci est aigu, une contradiction.

Exercice VII.37. On résout l'équation différentielle en $1/f$ et on contemple la solution de l'exercice VII.30.

Exercice VII.38. Les projections du foyer sur les tangentes à la parabole sont aussi sur la tangente au sommet (corollaire VII.2.16), donc cette tangente est la droite de Simson du foyer (voir au besoin l'exercice III.32) qui est sur le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois droites. La directrice est l'image de la tangente au sommet par l'homothétie de centre le foyer F et de rapport 2, c'est donc la droite de Steiner de F (voir l'exercice III.33).

Quand le foyer F tend vers un sommet A du triangle, la droite de Steiner, qui, comme toutes ses semblables, passe par l'orthocentre, tend vers la hauteur issue de A et la parabole dégénère en une droite double.

Exercice VII.39. Appelons les droites AFB, AEC, DEF, DCB (la figure est faite ?). En utilisant l'exercice VII.38, on sait que le foyer doit être sur les cercles circonscrits aux triangles ABC, CDE, BDF et AEF et que ce point doit avoir la même droite de Simson pour ces quatre triangles.

Les cercles circonscrits à ABC et BDF se coupent en B, donc, soit ils ont un point commun P, soit ils sont tangents. S'ils étaient tangents, les droites DF et AC seraient parallèles, ce qui est contraire à l'hypothèse de position générale. Soit donc P le deuxième point d'intersection. Il est sur le cercle circonscrit à ABC, donc ses projections P_1, P_2 et P_3 sur BC, CA et AB sont alignées. Il est aussi sur le cercle circonscrit à BDF donc ses projections P_1, P_4 et P_3 sur BD, DF et FB sont alignées. On en déduit toutes les propriétés voulues.

Exercice VII.40. Voir [**16**], [**30**] et le chapitre 17 de [**5**], où ces résultats classiques sont illustrés et démontrés.

Exercice VII.41. Considérons les quadriques d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n. Un polynôme (q, L, c) de degré 2 est un élément de $(Q(E) - \{0\}) \times E^\star \times \mathbf{K}$, un *ouvert* d'un espace affine ou vectoriel. Modulo multiplication par les scalaires non nuls, on n'obtient qu'un ouvert d'un espace projectif. Encore un point pour les quadriques projectives, comme dit Michel Coste !

Exercice VII.42. La conique est non dégénérée, il y a donc une homographie qui la transforme en un cercle... et le résultat est une application immédiate du théorème de Ceva (c'est l'exercice III.16). Ensuite on applique le théorème de Desargues aux deux triangles ABC et UVW.

Exercice VII.43. On reprend les notations du § VII.1. La conique passe par A et a pour équation $q(\overrightarrow{AM}) + L_A(\overrightarrow{AM}) = 0$. La droite passant par A et dirigée par u la rencontre en l'unique point simple A si et seulement si $q(u) = 0$. La conique projective a pour équation

$$q(u) + zL_A(u) = 0.$$

Elle rencontre la droite à l'infini ($z = 0$) en les points $(u, 0)$ tels que $q(u) = 0$.

Exercice VII.46. Utiliser la classification des quadriques réelles.

Exercice VII.48. On peut choisir trois points sur chacune des trois droites et se rappeler que par neuf points... et qu'une quadrique qui contient trois points d'une même droite contient cette droite tout entière.

Exercice VII.49. Sur la figure D, on a reproduit la figure concernée en y ajoutant une conique non dégénérée du pinceau (en pointillés) et toutes ses coniques dégénérées. Qui sont (en lisant de gauche à droite puis de haut en bas)

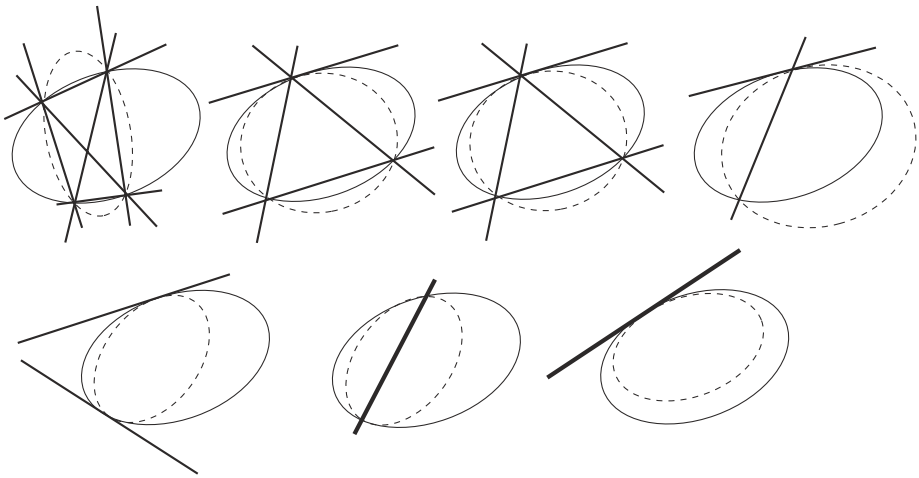


Figure d

– (type I) trois paires de droites pour le premier,

– (type II) deux paires de droites, le point d'intersection d'une des paires se trouvant sur une des droites de l'autre pour les deuxième et troisième — qui sont donc du même type,

– (type IV) une seule paire de droites pour le quatrième,

– (type III) une paire de droites et une droite double pour le cinquième et le sixième — qui sont donc du même type,

– (type V) une droite double pour le septième.

Tous les pinceaux représentés ici ont des points bases (réels), au nombre de quatre (type I), trois (type II), deux (types III et IV) et un (type V). Ce n'est pas le cas, par exemple, des faisceaux de cercles à points limites (voir la figure 22 du chapitre III).

Un faisceau de cercles à point bases appartient au type complexe du premier dessin (quatre points bases dont deux sont les points cycliques), ses coniques dégénérées sont les paires de droites définies par les deux points bases et les deux points cycliques, seule est réelle celle formée de la droite à l'infini et de l'axe radical.

Un faisceau de cercles tangents appartient au type complexe des deuxième et troisième dessins, la tangente commune est l'axe radical du faisceau, les deux autres points d'intersection sont les points cycliques.

Exercice VII.50. Les points d'intersection des deux coniques sont les mêmes que ceux de l'une d'elles avec une conique dégénérée du faisceau. On trouve les coniques dégénérées en résolvant une équation de degré 3 (proposition VII.3.11) et l'intersection de celles-ci avec une des coniques données en résolvant des équations du second degré.

Exercice VII.51. Si le point m n'est pas sur la conique dégénérée $\mathcal{C}$, son orthogonal est une droite passant par le point de concours des deux droites (on le démontre, par exemple, dans des coordonnées où $\mathcal{C}$ a pour équation $xy = 0$). Si le point m est sur la conique...

Exercice VII.52. Pascal dégénéré, c'est Pappus.

Exercice VII.53. Soit u un vecteur directeur de la droite vectorielle définissant le point A du plan projectif. Si φ et φ' sont les formes polaires de deux formes quadratiques définissant deux coniques engendrant le faisceau $\mathcal{F}$, les polaires en question sont les images des plans vectoriels $P_{\lambda,\lambda'}$ définis par l'équivalence

$$v \in P_{\lambda,\lambda'} \Leftrightarrow (\lambda\varphi + \lambda'\varphi')(u, v) = 0.$$

Si on a choisi φ et φ' non dégénérées, tous ces plans se rencontrent le long de la droite vectorielle $u^{\perp_Q} \cap u^{\perp_{Q'}}$.

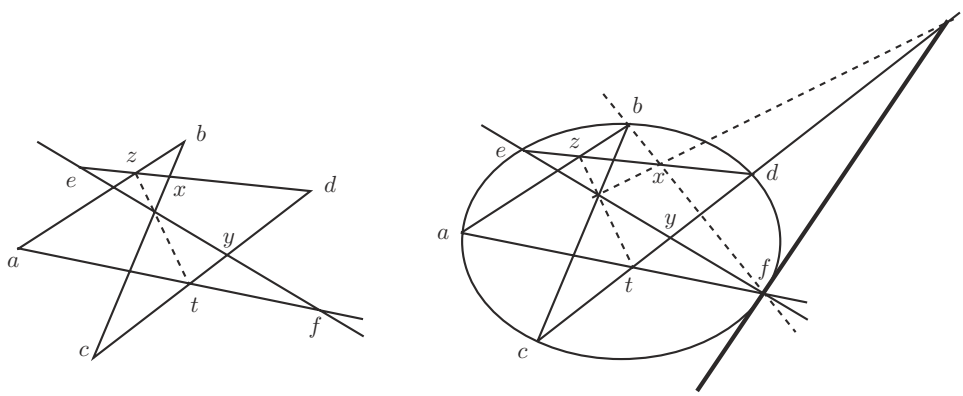


Figure e

Exercice VII.55. On considère une droite arbitraire D passant par e et on construit son deuxième point d'intersection f avec $\mathcal{C}$ en utilisant le théorème de Pascal. Les notations utilisées ici sont cohérentes avec celles de la figure 19 et de la démonstration du théorème de Pascal VII.4.4. Le point $z = ab \cap de$ est bien déterminé, le point $u = bc \cap D$ aussi, la droite uz coupe cd en t et on trouve f à l'intersection de D et at. Voir la figure e.

Pour construire la tangente en f, on applique le théorème de Pascal à l'hexagone $fbcdef$ (on « fait » $a = f$, vérifier que ce théorème reste vrai en remplaçant af par la tangente en f). On détermine $z' = fb \cap ed$, $t' = uz' \cap cd$ et la tangente est la droite ft'.

Exercice VII.56. Les points A, B, C et D forment un repère projectif. On peut donc fixer des coordonnées telles que $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$ (AB est la droite à l'infini $z = 0$), $C = [0, 0, 1]$ et $D = [1, 1, 1]$. Le faisceau est alors celui des coniques d'équation

$$\alpha y(x - z) - \beta x(y - z) = 0.$$

Dans le plan affine $z = 1$, c'est le faisceau des hyperboles d'asymptotes parallèles aux axes qui passent par l'origine et par $(1, 1)$. Le couple de coordonnées homogènes $[\alpha, \beta]$ est bien déterminé par la donnée des coordonnées $[x_0, y_0, z_0]$ du point M, sauf si $y_0(x_0 - z_0) = 0$ et $x_0(y_0 - z_0) = 0$, c'est-à-dire sauf si M est un des quatre points-bases. Ce qui répond à la première question. En plus, avec les mêmes notations, les droites MA, MB, MC et MD ont respectivement pour équations

$$y - y_0 z = 0, \quad x - x_0 z = 0, \quad y_0 x - x_0 y = 0, \quad (x_0 - z_0)(y - z) - (y_0 - z_0)(x - z) = 0.$$

Ainsi, en notant L_{UV} une équation de la droite UV, on a

$$\begin{cases} L_{MC} = -x_0 L_{MA} + y_0 L_{MB} \\ L_{MD} = -(x_0 - z_0) L_{MA} + (y_0 - z_0) L_{MB} \end{cases}$$

de sorte que la formule pour le birapport donne

$$\rho = [MA, MB, MC, MD] = \frac{\begin{vmatrix} -x_0 & z_0 \\ y_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -x_0 & 0 \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}} \Bigg/ \frac{\begin{vmatrix} -(x_0 - z_0) & z_0 \\ y_0 - z_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(x_0 - z_0) & 0 \\ y_0 - z_0 & z_0 \end{vmatrix}} = \frac{y_0(x_0 - z_0)}{x_0(y_0 - z_0)}.$$

Le lieu recherché est bien une conique passant par A, B, C et D, celle d'équation

$$y_0(x_0 - z_0) - \rho x_0(y_0 - z_0) = 0.$$

Exercice VII.57. Dans le plan projectif, un faisceau de cercles est un faisceau de coniques passant par les points cycliques. Une des coniques dégénérées de ce faisceau est formée de deux droites sécantes dont l'une est la droite à l'infini et l'autre l'axe radical. Les deux autres sont imaginaires. Voir plus précisément l'exercice VII.59.

Exercice VII.58. C'est un faisceau de cercles concentriques. Voir la solution de l'exercice VII.59.

Exercice VII.59. On l'a dit (solution de l'exercice VII.49), tous les pinceaux représentés ont des points bases réels, au nombre de quatre (type I), trois (type II), deux (types III et IV) et un (type V). Ce n'est pas le cas, par exemple, des faisceaux de cercles à points limites (figure 22 du chapitre III).

Tous les cercles passent par les (deux) points cycliques, donc il n'y a pas de faisceaux de cercles dans le type V. Il n'y en a pas non plus dans le type IV, l'involution complexe échangeant les deux points bases devrait envoyer la tangente en l'un de ces points sur une tangente commune aux coniques du faisceau. Il nous reste les types I à III.

Dans le type I, les points bases sont I, J, A et B. la droite IJ est la droite à l'infini (réelle !) et il y a deux possibilités pour les points A et B. Soit ils sont réels tous les deux, alors les droites AI et BJ sont imaginaires mais la droite AB est réelle, tous les cercles passent par A et B, la trace sur le plan affine euclidien de notre faisceau de coniques est un faisceau de cercles sécants en A et B. Soit ils sont imaginaires conjugués, la droite AB est toujours réelle, les droites AI et BJ (resp. AJ et BI) sont conjuguées, notre faisceau est un faisceau de cercles à points limites (d'axe radical AB).

Dans le type II, les points bases sont I, J et A, la droite IJ est toujours la droite à l'infini, le point A est réel (intersection des droites conjuguées AI et AJ) et toutes nos coniques ont la même tangente en A, la trace du faisceau de coniques est un faisceau de cercles tangents.

Dans le type III, les seuls points bases sont I et J, les tangentes en I et J à toutes nos coniques se coupent en un point O, pôle de la droite à l'infini et donc centre commun des cercles du faisceau, qui est un faisceau de cercles concentriques.

Exercice VII.60. C'est une hyperbole, puisqu'elle coupe la droite à l'infini en deux points. Les asymptotes sont orthogonales, elle est donc équilatère.

Exercice VII.61. On utilise une homographie (complexe) pour envoyer D et E sur les points cycliques, transformant ainsi la conique en une parabole de foyer... F (bravo à [**16**] pour cette brillante notation !) et les droites AB, BC et CA en trois de ses tangentes. On sait (exercice VII.38) que le cercle circonscrit au triangle ABC passe par F. Comme tous les cercles, il passe aussi par les points cycliques.

Exercice VII.67. L'homomorphisme $x \mapsto x^2$ donne la suite exacte

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbf{F}_q^\star \longrightarrow (\mathbf{F}_q^\star)^2 \longrightarrow 1,$$

il y a donc $(q-1)/2$ carrés dans $\mathbf{F}_q^\star$ et $(q+1)/2$ dans $\mathbf{F}_q$. Quand y varie, la quantité $(1-by^2)/a^2$ prend $(q+1)/2$ valeurs... parmi lesquelles il y a forcément un carré, puisque $2(q+1)/2 > q$.

Le résultat de « forme normale » des formes quadratiques se montre par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel. Le cas $n = 1$ est clair. Le point important est celui de la dimension 2. La question préliminaire donne un vecteur e_1 tel que $Q(e_1) = 1$. Soit f un vecteur qui lui soit orthogonal. Si $Q(f)$ est un carré, $Q(f) = \alpha^2$, posons $e_2 = f/\alpha$; la forme s'écrit alors $x_1^2 + x_2^2$. Sinon, $Q(f) = b$ n'est pas un carré, mais alors a/b en est un ($\mathbf{F}_q^\star/(\mathbf{F}_q^\star)^2$ n'a que deux éléments), $a = b\alpha^2$, posons $e_2 = \alpha f$, de sorte que la forme s'écrit $x_1^2 + ax_2^2$. Pour $n > 2$, on part d'une base orthogonale $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Dans le plan $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$, il y a un vecteur e_1 tel que $Q(e_1) = 1$, on peut ensuite appliquer l'hypothèse de récurrence à $H = e_1^\perp$.

Le nombre a, ou plus exactement sa classe dans $\mathbf{F}_q^\star/(\mathbf{F}_q^\star)^2$, est le discriminant de la forme (exercice VII.66), donc les deux formes ne sont pas équivalentes. De plus, une forme quadratique appartient à l'un ou l'autre des types selon que son discriminant est ou n'est pas trivial.

Exercice VII.69. Comme M est inversible, la matrice symétrique ${}^tMM$ est définie positive, on peut prendre pour S sa racine carrée (voir l'exercice VII.68) et poser $\Omega = MS^{-1}$.

Pour l'unicité, on utilise le polynôme P. Si $M = \Omega S = \Omega_1 S_1$, alors ${}^tMM = S_1^2$. La matrice S_1 commute avec S_1^2, donc avec ${}^tMM$, donc avec $P({}^tMM)$ et donc avec S. Les deux matrices symétriques S et S_1 sont diagonalisables et commutent, donc elles sont diagonalisables dans la même base et enfin elles sont égales.

Exercice VII.70. Utiliser la décomposition polaire (exercice VII.69) $M = \Omega S$ et diagonaliser S en $S = {}^t\Omega_2 D \Omega_2$.

Exercice VII.72. Deux points m et m' de $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ sont dans la même orbite s'il existe un isomorphisme linéaire $\widetilde{f}$ de $\mathbf{R}^3$ tel que $\widetilde{D} = D'$ et $q \circ \widetilde{f} = q$ (D et D' sont les deux droites de $\mathbf{R}^3$ qui définissent les deux points m et m'). D'après le théorème de Witt (théorème VII.7.10), c'est équivalent à l'existence d'un isomorphisme $f : D \to D'$ tel que

$$(q|_{D'}) \circ f = q|_D.$$

Mais, sur un espace vectoriel de dimension 1, il y a exactement trois types de formes quadratiques (nulle ou définie positive ou négative). Il y a donc trois orbites correspondant aux

– droites strictement contenues dans le cône isotrope, sur lesquelles la forme est définie négative,
– génératrices du cône, où la forme est nulle,
– droites strictement à l'extérieur du cône, où elle est définie positive.

Exercice VII.74. Les démonstrations de ces deux théorèmes peuvent être très simples si on utilise la dualité. Voir par exemple le chapitre 2 de [**55**].

Exercice VII.77. La seule chose à laquelle il faut faire attention : quand on a choisi deux vecteurs e_1 et f_1 tels que $\varphi(e_1, f_1) = 1$, il faut vérifier que la restriction de φ à l'orthogonal du plan qu'ils engendrent est non dégénérée pour finir de construire la base par récurrence.

La dimension de E est paire, disons $2n$, la dimension de F est inférieure ou égale à n.

Chapitre VIII

Exercice VIII.1. On met l'origine en A par un changement (affine) de coordonnées qui n'altérera pas le caractère rationnel des solutions. Les points d'intersection de $\mathcal{D}_t$ et de $\mathcal{C}$ sont les (x, tx) tels que $q(x, tx) + L_A(x, tx) = 0$ (avec les notations du chapitre VII). C'est une équation du second degré en x, qui a la racine $x = 0$ (correspondant au point A) et qui est donc de la forme

$$x(a(t)x + b(t)) = 0$$

où a et b sont des polynômes de degré ≤ 2 et $a(t) \neq 0$. Le deuxième point d'intersection a donc pour coordonnées les fractions rationnelles

$$x = -\frac{b(t)}{a(t)} \qquad y = -\frac{tb(t)}{a(t)}.$$

Le cas du cercle unité ($x^2 + y^2 = 1$) et du point $A = (-1, 0)$ donne le classique paramétrage par « $t = \operatorname{tg} \dfrac{\theta}{2}$ » (on est prié de faire une figure !)

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Exercice VIII.2. C'est une « cubique à point double » avec un point double à l'origine. Une droite passant par l'origine la coupe en l'origine (racine double) et en un autre point. Si la pente de la droite est t, on trouve

$$x = t^2 - 1 \qquad y = t(t^2 - 1).$$

Pour la « cubique cuspidale », on trouve de même le paramétrage

$$x = t^2 \qquad y = t^3.$$

Exercice VIII.3. C'est un 8 ou un ∞, les tangentes au point double sont les axes de coordonnées. Une équation cartésienne est

$$xy = (x^2 + y^2)^2$$

et une équation en polaires $2\rho^4 = \sin(2\theta)$, donc.

Exercice VIII.4. C'est une lemniscate de Bernoulli. Les asymptotes (tangentes en ∞) deviennent les tangentes au pôle (image de ∞), *etc.*

Exercice VIII.5. Les deux paraboles ont pour équations $y = x^2$ (quand t tend vers l'infini, $x \sim t$, $y \sim t^2$) et $y^2 = 8x$ (quand t tend vers 0, $x \sim 1/t^2$, $y \sim 2/t$). Il y a un point singulier (obtenu pour $t = 1$), qui est un point de rebroussement de première espèce.

Exercice VIII.6. On paramètre la courbe « discriminant » par la racine multiple t en écrivant

$$P(X) = (X - t)^2(X + 2t),$$

ce qui donne a et b en fonction de t... et encore la cubique cuspidale. Le point singulier correspond au polynôme X^3, qui a une racine triple. Les deux composantes du complémentaire correspondent aux polynômes ayant

- une seule racine réelle (celle contenant les points $a = 0$, $b \neq 0$)
- trois racines réelles (l'autre). Voir aussi l'exercice IX.9.

Exercice VIII.7. Fixons deux points M et N de $\mathcal{D}$ et les deux points correspondants M' et N' de $\mathcal{D}'$. L'hypothèse est que, pour P sur $\mathcal{D}$, le point P' correspondant vérifie

$$\frac{\overline{M'P'}}{\overline{M'N'}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}}.$$

Soit F le centre de la similitude directe qui envoie M sur M' et N sur N' (et donc aussi P sur P'). Les triangles FMN et $FM'N'$ sont semblables, donc aussi FMM' et FNN'. Si H_M est la projection orthogonale de F sur MM', les triangles FH_MM et FH_NN sont semblables, donc il existe une similitude de centre F qui envoie le point M de $\mathcal{D}$ sur H_M. Soit Δ l'image de $\mathcal{D}$ par cette similitude. L'enveloppe recherchée est la parabole de foyer F et de tangente au sommet Δ.

Exercice VIII.8. Soient B et B' les points de D et D' respectivement tels que $\overline{OB} = a$ et $\overline{OB'} = a$ et soit F l'intersection des médiatrices de OB et OB'. La médiatrice de AA' passe par F. Soit I le milieu de AA'. Le triangle FAI est isocèle rectangle, le lieu de I est donc l'image D'' de D par une similitude. La droite AA' enveloppe une parabole de foyer F et de tangente au sommet la droite D''.

Exercice VIII.9. On montre en utilisant le théorème de Thalès qu'on a

$$\frac{\overline{FB'}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FP}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{FB'}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{FC}}$$

et donc qu'on a aussi $FP^2 = \overline{FB} \cdot \overline{FC}$. Donc le point F est fixe. L'enveloppe est une parabole de foyer F dont la tangente au sommet est la droite AP.

Exercice VIII.12. Le même que pour un triangle équilatéral.

Exercice VIII.14. Une droite parallèle à l'axe des x se réfléchit au point $(\cos\theta, \sin\theta)$ du cercle unité en la droite de pente $\operatorname{tg}(2\theta)$. On dérive par rapport à θ l'équation

$$\sin(2\theta)x - \cos(2\theta)y = \sin\theta$$

de cette droite et on trouve le paramétrage

$$x + iy = \frac{1}{4}\left(3e^{i\theta} - e^{3i\theta}\right)$$

qui représente une néphroïde.

Exercice VIII.16. Le cercle $\mathcal{C}'$ a pour rayon R et le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon r. On fixe l'origine au centre du cercle fixe $\mathcal{C}'$ et on paramètre $\mathcal{C}'$ par $Re^{i\theta}$. On suppose qu'au départ, le point M est en R ($\theta = 0$, choix de l'origine des θ). L'hypothèse « rouler sans glisser » veut dire que

– les cercles restent tangents

– quand le point de tangence est en $Re^{i\theta}$, le point M qui aurait parcouru la distance $R\theta$ le long de $\mathcal{C}'$ a parcouru cette même distance le long de $\mathcal{C}$ (faire une figure).

On en déduit facilement un paramétrage de la courbe cherchée par

$$(R + r)e^{i\theta} \pm re^{i\frac{R+r}{r}\theta}$$

et le résultat.

Exercice VIII.17. Soit O le centre du cercle. À tout point M distinct de A, on associe le deuxième point d'intersection M' de $\mathcal{D}_M$ avec le cercle. Si θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$, 4θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})$.

Soit α une mesure de l'angle *fixe* (OA, D). On évalue l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'M})$ (on trouve $\alpha - \theta - \frac{\pi}{2}$) puis $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, dont une mesure est $2\alpha - 2\theta - \pi$. Ainsi M' tourne deux fois plus vite que M et en sens inverse. On a bien une hypocycloïde à trois rebroussements.

Exercice VIII.19. Les droites de Steiner passent par l'orthocentre H (exercice III.33), leur enveloppe est donc le point H.

L'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ transforme le cercle circonscrit en le cercle d'Euler $\mathcal{E}$ (exercice II.21) donc le point μ est sur $\mathcal{E}$. On a de plus

$$H \in \mathcal{D}_M = h_{M,2}(\mathcal{S}_M)$$

donc $h_{M,2}^{-1}(H) = \mu \in \mathcal{S}_M$. Le point μ est le milieu de HM, il se projette donc sur BC au milieu de $A'M_A$ où A', le pied de la hauteur issue de A, est un point (fixe) du cercle d'Euler. De plus, le triangle $A'\mu M_A$ est isocèle de sommet μ donc la bissectrice de son angle en μ est sa hauteur, elle est donc parallèle à la hauteur issue de A (une direction fixe).

Conclusion : la droite de Simson μM_A de M

– passe par le point μ du cercle $\mathcal{E}$,

– est telle que la bissectrice de l'angle $(A'\mu, \mathcal{S}_M)$ soit parallèle à la hauteur issue de A.

Il ne reste plus qu'à appliquer le résultat de l'exercice VIII.17.

Exercice VIII.21. La matrice $A(s)$ est orthogonale, donc vérifie, pour tout s, la relation ${}^tA(s)A(s) = \mathrm{Id}$. On dérive cette relation par rapport à s pour obtenir

$${}^t\left(\frac{dA}{ds}(s)\right)A(s) + {}^tA(s)\frac{dA}{ds}(s) = 0.$$

Soit $B(s) = {}^tA(s)\dfrac{dA}{ds}(s)$. La relation précédente affirme que $B(s)$ est antisymétrique.

Si $A(s)$ est la matrice (orthogonale) qui décrit la base orthonormée $(\tau(s), n(s), b(s))$ dans la base canonique, la matrice $B(s)$ est celle qui exprime les vecteurs $(\tau'(s), n'(s), b'(s))$ dans la base $(\tau(s), n(s), b(s))$. Elle est bien antisymétrique.

Exercice VIII.23. Le paramétrage de l'astroïde par $-3e^{i\theta} + e^{-3i\theta}$ devient, après le changement de variables $\theta = \varphi - \dfrac{\pi}{4}$ (et à rotation près)

$$3e^{i\varphi} + e^{-3i\varphi} = 4(\cos^3\varphi + i\sin^3\varphi).$$

On paramètre l'ellipse par $(x, y) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$. La normale au point de paramètre φ a pour équation

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi - (a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

On en déduit un paramétrage de la développée :

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi \qquad y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\varphi.$$

Exercice VIII.24. Dériver la relation $C(s) = g(s) + \rho(s)n(s)$ par rapport à s pour obtenir l'égalité $C'(s) = \rho'(s)n(s)$ et conclure.

Exercice VIII.26. On raisonne comme dans l'exercice VIII.16 pour trouver les équations de la cycloïde. Ensuite, la normale a pour équation

$$x \sin \frac{t}{2} + y \cos \frac{t}{2} - Rt \sin \frac{t}{2} = 0.$$

L'enveloppe des normales se laisse paramétrer par

$$x = R(t + \sin t) \qquad y = R(\cos t - 1).$$

C'est l'image de la cycloïde par la translation $(\pi R, -2R)$.

Exercice VIII.27. On choisit un repère orthonormé d'origine O dans lequel le point A a pour coordonnées $(1, 0)$. Si t est la pente de la droite Δ, les coordonnées de Q sont $(1, t)$. Celles de P sont $(1, t)/(1 + t^2)$ et donc celles de M sont comme espéré. La droite $\mathcal{D}$ est une asymptote et le point O est singulier (c'est un point de rebroussement de première espèce).

On vérifie directement que l'ordonnée de G est $\sqrt[3]{2}$, mais ce nombre n'est pas constructible pour autant puisque le point F n'a pas été « construit ».

Chapitre IX

Exercice IX.2. Les courbes $\theta =$ constante sont des droites passant par les points de l'axe des z, les courbes $t =$ constante sont des hélices circulaires.

Exercice IX.3. Il faut supposer que x et y ne sont pas tous les deux nuls. On recherchera les points $(0, 0, c)$ de l'axe des z par lesquels passent des droites contenues dans la surface. En fait, le conoïde de Plücker est formé de deux parapluies de Whitney (voir l'exercice IX.10).

Exercice IX.4. Un hyperboloïde à une nappe.

Exercice IX.7. Si la courbe méridienne est régulière, les deux vecteurs ne sont colinéaires qu'en les points où elle rencontre l'axe de révolution. Les paramétrages obtenus dans l'exercice IX.1 ne sont jamais réguliers en ces points. Néanmoins, si les méridiens ont un vecteur tangent orthogonal à l'axe, la surface est régulière et le plan tangent est le plan orthogonal à l'axe (on peut utiliser un paramétrage cartésien). Penser à l'exemple de la sphère.

Exercice IX.8. Le vecteur tangent $\partial f/\partial u$ est w. Le plan tangent au point de paramètre (t, u) est engendré par $w(t)$ et $\gamma'(t) + uw'(t)$. Pour qu'il ne dépende pas de u il faut et il suffit que $w'(t)$ soit combinaison linéaire de $\gamma'(t)$ et $w(t)$.

Si la surface est cylindrique, w est constant donc w' est nul. Si elle est conique, $w(t) = \gamma(t)$ (en prenant l'origine au sommet du cône) et $w' = \gamma'$. Dans les deux cas, le plan tangent en un point rencontre la surface le long de la génératrice passant par ce point. En général les points de ces surfaces sont paraboliques.

Exercice IX.9. Comme dans l'exercice VIII.6, dire que P a une racine multiple, c'est dire qu'il s'écrit $P(X) = (X-u)^2(X-v)(X+2u+v)$, on en déduit un paramétrage de la surface « discriminant » en exprimant a, b et c en fonction de u et v. La surface présente

– une ligne de points doubles, quand le polynôme a deux racines doubles (c'est-à-dire quand $v = -u$),

– deux courbes de points singuliers correspondant aux polynômes ayant une racine triple ($v = u$ et $v = -3u$),

– ces trois courbes se retrouvant au point $u = v = 0$ correspondant au polynôme X^4, qui a une racine quadruple.

Exercice IX.10. Pourquoi « parapluie » ? Les points de la surface satisfont à l'équation cartésienne $x^2 - zy^2 = 0$ qui, en retour, décrit la réunion de la surface et de l'axe des z. On considère la partie $z < 0$ de cet axe comme le manche du parapluie.

Exercice IX.11. Toutes ces surfaces sont tangentes au plan $z = 0$ en 0. Il n'y a donc aucun calcul à faire, la dérivée seconde est (à un facteur 2 près) la partie quadratique de l'équation. Par contre, il faut faire un dessin.

– Pour $z = x^2$, on a un point parabolique, la surface rencontre le plan tangent le long d'une droite, elle reste du même côté de ce plan ; pour $z = x^2+y^3$, toujours un point parabolique (la dérivée seconde est la même), mais la surface a des points des deux côtés du plan tangent.

– Pour les autres, 0 est un point planaire. Pour $z = x^3$, la surface traverse le plan tangent qu'elle rencontre le long d'une droite ; pour $z = x^4$, elle le rencontre le long d'une droite mais reste du même côté ; pour $z = x^3 - 3xy^2$, la surface rencontre le plan tangent le long de trois droites concourantes, elle est située alternativement au-dessus et au-dessous des secteurs délimités par ces droites (il y a un creux pour chacune des jambes du singe et un autre pour sa queue).

Exercice IX.13. On montre d'abord que, si p est un extremum de h sur Σ, alors $(dh)_p(X) = 0$ pour tout X dans $T_p\Sigma$. En effet, utilisons une courbe γ dessinée sur Σ et telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Si p est un extremum de h, 0 est un extremum de $h \circ \gamma$, donc

$$(dh)_p(X) = (h \circ \gamma)'(0) = 0.$$

Ensuite, $(dh)_p$ est nulle sur $T_p\Sigma = \mathrm{Ker}(dF)_p$ (proposition IX.2.11) donc

$$(dh)_p = \lambda(dF)_p.$$

Sur la sphère $F^{-1}(0)$, il est clair que la fonction « hauteur » z a un maximum au pôle nord et un minimum au pôle sud. C'est confirmé par l'étude précédente :

$$(dF)_p(X) = 2p \cdot X \qquad (dz)_p(X) = e_3 \cdot X$$

(la troisième coordonnée de X) et $(dz)_p = \lambda(dF)_p$ si et seulement si $p = \pm e_3$.

La condition d'indépendance de $(dF)_p$ et $(dG)_p$ assure que les plans tangents $\mathrm{Ker}(dF)_p$ et $\mathrm{Ker}(dG)_p$ aux deux surfaces sont distincts. On peut appliquer la proposition IX.2.16 : l'intersection est une courbe Γ. Le même argument que ci-dessus montre que si $p \in \Gamma$ est un extremum de h, $(dh)_p$ est nulle sur $T_p\Gamma = \mathrm{Ker}(dF)_p \cap \mathrm{Ker}(dG)_p$. Un lemme facile d'algèbre linéaire, le « lemme des noyaux » permet de conclure.

Exercice IX.14. Le plan tangent $T_p\Sigma$ est le noyau de la différentielle de

$$F(x, y, t) = u(t)x + v(t)y + w(t)$$

en p. Pour que ce noyau contienne l'axe des t, il faut et il suffit que $\partial F/\partial t$ soit nulle. On retrouve le système d'équations linéaires du § VIII.1.

Dans le cas de la fronce, la courbe obtenue est aussi le discriminant du polynôme (en t) de degré 3.

Exercice IX.15. On peut dire tout simplement que tous les points sont planaires ou paraboliques, donc que la courbure de Gauss est nulle. On peut aussi le vérifier en remarquant que le vecteur normal est constant le long des génératrices. On paramètre Γ par $t \mapsto \gamma(t)$ et la surface par $(t, u) \mapsto (1 + tu)\gamma(t) = f(t, u)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (1 + u)\gamma'(t), \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \gamma(t)$$

de sorte qu'on peut choisir

$$n(t, u) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma(t)\|}$$

qui ne dépend pas de u. Donc $\partial n/\partial u = 0$ et la courbure de Gauss est nulle.

Exercice IX.16. Les formules de l'appendice (§ IX.4) donnent facilement le résultat dans ce cas :

$$K(p) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\left(\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2}\right)^{-2}.$$

Comme on s'y attend (?) la courbure des ellipsoïdes (tous les α_i positifs) et celle des hyperboloïdes à deux nappes (deux des α_i négatifs) est positive, alors que celle des hyperboloïdes à une nappe, surfaces réglées (un des α_i positif) est négative.

Exercice IX.17. On a

$$n(s,\theta) = \begin{pmatrix} -h'(s)\cos\theta \\ -h'(s)\sin\theta \\ g'(s) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{\partial n}{\partial s}(s,\theta) = -\frac{h''(s)}{g'(s)}\frac{\partial f}{\partial s}(s,\theta), \quad \frac{\partial n}{\partial \theta} = -\frac{h'(s)}{g(s)}\frac{\partial f}{\partial \theta}(s,\theta).$$

et la courbure de Gauss vaut

$$K(s,\theta) = \frac{h'(s)h''(s)}{g(s)g'(s)} = -\frac{g''(s)}{g(s)}.$$

(1) Si $K(s,\theta) = 0$, $g(s) = as + b$, quitte à changer d'origine pour s, on a donc

$$\text{soit} \left\{ \begin{array}{lcl} g(s) & = & as \\ h(s) & = & \pm(\sqrt{1-a^2})s \end{array} \right. \quad \text{soit} \left\{ \begin{array}{lcl} g(s) & = & b \\ h(s) & = & s. \end{array} \right.$$

On trouve donc un cône (pour $|a| < 1$) ou un plan (pour $|a| = 1$) dans le premier cas, un cylindre dans le deuxième.

(2) Si $K(s,\theta) = K > 0$, $g(s) = a\cos(\sqrt{K}s + b)$, on peut supposer qu'on a

$$g(s) = a\cos(\sqrt{K}s) \text{ et } h(s) = \int_0^s \pm\sqrt{1 - a^2K\sin^2(\sqrt{K}u)}du.$$

C'est une sphère si $a^2K = 1$, les méridiennes sont un peu plus compliquées sinon, h étant donnée par une « intégrale elliptique ».

(3) Si $K(s,\theta) < 0$, on a $g(s) = a\exp(\sqrt{-K}s) + b\exp(-\sqrt{-K}s)$.

Exercice IX.18. La courbure de la chambre à air est positive « côté pneu » et négative « côté jante ». Par le calcul, on paramètre le cercle par la longueur d'arc

$$g(s) = R + r\cos\frac{s}{r}, \quad h(s) = r\sin\frac{s}{r} \qquad R > r.$$

On utilise la formule du début de l'exercice IX.17 et on trouve

$$K(s,\theta) = \frac{\cos\frac{s}{r}}{r(R + r\cos\frac{s}{r})}$$

qui est positive pour $\frac{s}{r}$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ comme on s'y attendait.

Exercice IX.19. On fixe un point O hors de Σ. Comme la surface est compacte, la fonction $F(p) = \|p\|^2$ atteint son maximum sur Σ. On va montrer qu'en un point p qui réalise un maximum local de F, on a (pour un choix convenable du vecteur normal n)

$$\mathrm{II}_p(X, X) \geq \frac{1}{\|p\|^2}$$

pour tout vecteur unitaire X dans $T_p\Sigma$. En particulier, les courbures principales vérifient cette inégalité et donc la courbure de Gauss est strictement positive.

D'abord, on a $T_p\Sigma = p^\perp$, car $(dF)_p(X) = 2p \cdot X$ doit s'annuler sur $T_p\Sigma$. On choisit le vecteur normal au voisinage de p de façon que $n(p)$ soit de sens contraire à p. Soit X un vecteur unitaire dans $T_p\Sigma$. Le plan perpendiculaire à $T_p\Sigma$ contenant X est le plan passant par O engendré par p et X. Soit γ une courbe dessinée sur Σ, paramétrée par la longueur d'arc et telle que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$. On sait (proposition IX.3.4) que

$$\mathrm{II}_p(X, X) = \langle \gamma''(0), n(p) \rangle.$$

Plaçons-nous dans le plan orienté $P_X = \langle X, p \rangle$. Le point p réalise aussi un maximum de F sur γ. On écrit

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= \gamma(0) + s\tau(0) + \frac{s^2}{2} K_X(0) n(0) + o(s^2) \\
&= p + sX + \frac{s^2}{2} K_X(0) n + o(s^2) \\
&= sX + \left(\frac{s^2}{2} K_X(0) - \|p\| \right) n + o(s^2).
\end{aligned}$$

On calcule

$$\|\gamma(s)\|^2 = \|p\|^2 + s^2 \left(1 - \|p\| \, K_X(0)\right) + o(s^2).$$

Pour que cette fonction de s ait un maximum local en 0, il faut que le coefficient de s^2 soit négatif, ce qui donne exactement la condition recherchée sur K_X.

Exercice IX.20. Une surface fabriquée avec une feuille de papier est plate (a une courbure de Gauss nulle).

Exercice IX.21. Tous les points de la sphère sont des ombilics. Pour un ellipsoïde, avec les formules de l'appendice (§ IX.4), un point est un ombilic si et seulement si l'équation en μ donnée par le déterminant 4×4 a une racine double. On trouve, si $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ (c'est-à-dire, à la numérotation près, si l'ellipsoïde n'est pas de révolution) que les ombilics sont les quatre points de coordonnées

$$\left(\pm\sqrt{\alpha_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3}}, 0, \pm\sqrt{\alpha_3 \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}} \right).$$

Exercice IX.24. On calcule, pour la première surface

$$n(t,\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ -t \end{pmatrix},$$

donc

$$\frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

et $K(t,\theta) = -\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$. Pour l'hélicoïde, on a

$$n(t,\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ -t \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

donc $K(t,\theta) = -\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$. Les courbures sont les mêmes. Si φ était une isométrie locale, elle préserverait la courbure et serait donc de la forme

$$\varphi(t,\theta) = (\pm t, \psi(t,\theta)).$$

Or, pour la première surface, on a

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 = 1 + \frac{1}{t^2}$$

alors que, pour la deuxième

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|^2 = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Apéry – *Models of the real projective plane*, Vieweg, Braunschweig, 1987.

[2] J.-M. Arnaudiès – *Les cinq polyèdres réguliers de* $\mathbf{R}^3$ *et leurs groupes*, Centre de documentation universitaire, 1969.

[3] E. Artin – *Algèbre géométrique*, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, 1967.

[4] M. Artin – *Algebra*, Prentice Hall, 1990.

[5] M. Berger – *Géométrie*, CEDIC, 1977, Réédition Nathan, 1990.

[6] M. Berger & B. Gostiaux – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, 1987, Réédition d'un ouvrage paru chez Armand Colin.

[7] N. Bourbaki – *Topologie générale, chap. 1 à 4*, Hermann, 1971.

[8] C. Boyer – *The rainbow, from myth to mathematics*, MacMillan, 1987.

[9] G. Cagnac, E. Ramis & J. Commeau – *Traité de mathématiques spéciales, tome 4, applications de l'analyse à la géométrie*, Masson, 1971.

[10] J.-C. Carrega – *Théorie des corps*, Collection Formation des Enseignants et Formation Continue, Hermann, Paris, 1989, La règle et le compas.

[11] H. Cartan – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

[12] H. Cartan – *Calcul différentiel*, Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[13] G. Choquet – *Topologie*, Masson, 1964.

[14] H. S. M. Coxeter – *Introduction to geometry*, Wiley, 1969.

[15] H. S. M. Coxeter & S. L. Greitzer – *Redécouvrons la géométrie*, Dunod, 1971, Réédition Gabay, 1997.

[16] R. Deltheil & D. Caire – *Géométrie & Compléments de géométrie*, 1951, Réimpression Gabay.

[17] J. Dixmier – *Cours de mathématiques du premier cycle*, Gauthier-Villars, 1976.

[18] A. Dürer – *Underweysung des messung / mit dem zirckel und richtscheyt / in linien ebnen unnd gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zu samen getzogen / und zu nutz aller kuntsliebhabenden mit zu gehörigen figuren : in truck gebracht : im jar M.D.X.X.V.*, in *Géométrie, présentation et traduction de Jeanne Peiffer*, Sources du savoir, Seuil, 1995.

[19] H. Eisler – *Vierzehn Arten den Regen zu beschreiben*, Variations pour flûte, clarinette, alto, violoncelle et piano, opus 70, 1941.

[20] Encyclopædia Universalis – *Atlas*, 1974.

[21] J.-P. Escofier – *Théorie de Galois*, Enseignement des Mathématiques, Masson, Paris, 1997, Cours avec exercices corrigés.

[22] J. Frenkel – *Géométrie pour l'élève professeur*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1973.

[23] C. Godbillon – *Éléments de topologie algébrique*, Méthodes, Hermann, Paris, 1971.

[24] D. Guin – *Algèbre, tome 1, Groupes et anneaux*, Espaces34 et Belin, 1998.

[25] Hergé – *Le lotus bleu*, Les aventures de Tintin et Milou, Casterman, 1936.

[26] ———, *Le trésor de Rackham le Rouge*, Les aventures de Tintin et Milou, Casterman, 1945.

[27] D. Hilbert & S. Cohn-Vossen – *Anschaulige geometrie*, Springer, 1932.

[28] V. Komornik – « A short proof of the Erdős-Mordell theorem », *Amer. Math. Month.* (1997), p. 57–60.

[29] I. Lakatos – *Preuves et réfutations*, Hermann, 1984.

[30] C. Lebossé & C. Hémery – *Géométrie, classe de mathématiques*, Nathan, 1961, Réimpression Gabay 1990.

[31] D. Lehmann & C. Sacré – *Géométrie et topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, 1982.

[32] J. Lelong-Ferrand – *Les fondements de la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1985.

[33] J. Lelong-Ferrand & J.-M. Arnaudiès – *Cours de mathématiques, tome 3, géométrie et cinématique*, Dunod, 1975.

[34] V. Lespinard & R. Pernet – *Géométrie, Terminale C*, André Desvignes, 1967.

[35] P. Libermann – « Géométrie différentielle classique », *Encyclopædia Universalis, tome 10* (1974).

[36] R. Mneimné & F. Testard – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Méthodes, Hermann, 1986.

[37] G. Perec – *Je me souviens*, P.O.L., Hachette, 1978.

[38] D. Perrin – *Géométrie algébrique*, Savoirs actuels, InterÉditions, 1995.

[39] ———, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[40] J.-P. Petit – *Le géométricon*, Les aventures d'Anselme Lanturlu, Belin, 1980.

[41] I. Porteous – *Geometric topology*, Van Nostrand, 1969.

[42] J. Prévert – *Œuvres*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1992.

[43] A. Robert – *L'épreuve sur dossier à l'oral du du* capes*, Géométrie*, Ellipses, 1995.

[44] F. Rouvière – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 2003, Deuxième édition revue et augmentée.

[45] W. Rudin – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.

[46] P. Samuel – *Géométrie projective*, Presses Universitaires de France, 1986.

[47] P. Sauser – *Algèbre et géométrie*, Ellipses, 1986.

[48] J.-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[49] J.-C. Sidler – *Géométrie projective*, InterÉditions, 1993.

[50] R. Silverman – *Introductory complex analysis*, Dover, 1972.

[51] M. Spivak – *Differential geometry*, Publish or perish, 1975.

[52] I. Stewart – *Oh ! catastrophe*, Belin, 1982.

[53] ———, *Galois theory*, second éd., Chapman and Hall Ltd., London, 1989.

[54] ———, *Visions géométriques*, Bibliothèque *Pour la Science*, Belin, 1994.

[55] S. Tabachnikov – *Billiards*, Panoramas et Synthèses, 1, Société Mathématique de France, 1995.

[56] J. Verne – *Le pays des fourrures*, Hetzel, 1873.

[57] ———, *L'île mystérieuse*, Hetzel, 1874.

[58] H. Weyl – *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

INDEX

A
abscisse curviligne, 305
action, 180
affine
  application, 16
  conique, 223
  droite, 12
  espace, 9
  groupe, 21, 41, 48
  indépendance, 13
  isométrie, 52, 68
  plan, 12
  projection, 38
  propriété, 304
  quadrique, 223
  repère, 13
  sous-espace, 11
affinité, 41
aigu
  angle, 113
aire
  d'un fuseau, 151
  d'un triangle sphérique, 152
  orientée, 150, 333
Alexandrov, 173, 182
alterné
  groupe, 111, 161, 167, 173
alternée
  application bilinéaire, 147
  forme bilinéaire, 289
alternative de Steiner, 124
anacoluthe, 215
anallagmatique
  invariant, 123, 285
angle
  aigu, 113
  d'une rotation, 145
  d'une rotation plane, 63, 87
  d'une similitude, 91
  de deux courbes, 96
  de deux plans, 152
  géométrique, 79
  inscrit, 83
  orienté, 2
  orienté de droites, 76
  orienté de vecteurs, 74
  trissection de l', 127, 133, 313, 314
Antarctique, 169
antenne, 307
anti-déplacement, 58
anti-rotation, 144, 147
antisymétrique
  forme bilinéaire, 289
  matrice, 289
Apollon, 127
Apollonius, 2, 279, 282
application
  affine, 16
  de Gauss, 333
  holomorphe, 125, 201
  tangente, 326
arc capable, 116
arc-en-ciel, 2, 293, 308
archimédien, 164
arête, 153
astroïde, 298, 311
asymptote, 229, 304
axe
  d'une conique propre, 231
  d'une rotation, 143, 145
  de la Terre, 169
  de révolution, 316
  focal, 233
  radical, 103, 121, 132, 257, 264

B
ballon de football, 170
Banach, 170
bande de Möbius, 218, 347
barycentre, 29
  conservation du, 19
barycentriques
  coordonnées, 42, 150, 216
base
  directe, 69
  orthogonale, 266, 267
  orthonormée, 60
  point, 105

Beethoven, 156
belge
  histoire, 282
Bernoulli, 306
Bézout, 137, 247
bifocale
  propriété, 233
bilinéaire
  forme, 51, 265
bipoint, 37
birapport
  calcul du, 197
  conservation du, 196
  de quatre droites, 208
  de quatre points alignés, 196
  de quatre points sur une conique, 248
  et orthogonalité, 256
  et permutations, 199
  réel, 202
biréglée
  surface, 283
bissectrice
  extérieure, 80
  intérieure, 80
bissectrices, 78, 235, 238, 259
Black, 169
bol, 308
Bonnet, 341
Brianchon, 287

C

capable
  arc, 116
cardioïde, 299, 307
cartésien
  paramétrage, 320
cartésiennes
  coordonnées, 14, 33
  équations, 34
Cartan, 287
  décomposition de, 287
carte, 2, 153, 169, 172
cas
  d'égalité, 115
  de similtude, 120
Cauchy, 52, 67
caustique, 294, 302, 307, 308
centre
  d'un cercle exinscrit, 112
  d'une conique, 226, 227
  d'une quadrique, 226, 227, 255
  d'une rotation, 87, 88
  d'une similitude, 90
  de courbure, 300
  de gravité, 30, 31
  du cercle circonscrit, 70, 112
  du cercle inscrit, 112
cercle, 231, 257
  circonscrit, 70
  d'Euler, 2, 70, 310
  d'inversion, 95
  des neuf points, 71
  exinscrit, 112
  grand, 151
  inscrit, 112
  osculateur, 300, 311
  petit, 151
  quadrature du, 127, 133, 314
Ceva, 46
chaînette, 347
Chasles, 9, 76, 248, 289
cinématique, 291
circonscrit
  cercle, 70
circulaire
  groupe, 203, 265
  hélice, 311
cissoïde de Dioclès, 312
classification, 228, 232, 244, 267
cocyclicité, 85, 202
cœur, 299, 308
col, 277, 317, 345
compacité
  de l'ellipse, 229, 232
  de l'espace projectif, 178
  de la sphère, 173
  du groupe $\mathrm{O}(n)$, 61
compactifié d'Alexandrov, 173, 182
compas, 127
complémentaire
  d'un hyperplan, 43
  d'une conique, 289
  d'une droite, 43, 206
complet
  quadrilatère, 46, 70
complétion projective, 183, 195, 200, 240, 250
complexe
  exponentielle, 63
conchoïde de Nicomède, 313
cône, 287, 317, 337
  de révolution, 282, 316
  isotrope, 239
conique
  à centre, 227
  affine, 223, 228
  dégénérée d'un faisceau, 247
  homofocale, 288
  projective, 239
  propre, 228
  réelle, 289
  section, 282
  tangentielle, 287
conjugaison, 23, 40, 122
  principe de, 23
conjugués
  diamètres, 279
connexité
  de $\mathrm{GL}(n;\mathbf{R})^+$, 72
  de $\mathrm{O}^+(n)$, 66
  de l'ellipse, 230
  de l'espace projectif, 178
  de la parabole, 232
conoïde
  de Plücker, 344
conservation
  de l'alignement, 19, 48, 191, 216
  de l'orientation, 58, 69
  de l'orthogonalité, 52, 97

de la norme, 52
des angles, 78, 79, 91, 93, 97, 125, 201
des cercles, 102, 202
du barycentre, 19
du birapport, 196
du produit scalaire, 52
constructibilité, 128, 130
des polygones réguliers, 127, 134, 137
du pentagone régulier, 136
constructible, 128
construction, 128
à la règle et au compas, 128
du jardinier, 235
construit, 128
contour apparent, 346
convexe, 31, 153
enveloppe, 32, 153
coordonnées, 14
barycentriques, 42, 150, 216
cartésiennes, 14, 33
homogènes, 192, 216, 248
cosinus, 64
courbe
cycloïdale, 296
parallèle, 302
paramétrée, 291
régulière, 303
courbure
algébrique, 299
centre de, 300
d'un cône, 337
d'un cylindre, 337
d'un plan, 337
d'un tore de révolution, 347
d'une courbe dans l'espace, 311
d'une courbe plane, 299
de Gauss, 334
de la sphère, 153, 155, 337
des surfaces de révolution, 347
direction de, 337
principale, 337
cube, 158
duplication du, 127, 133, 312
cubique
à point double, 306
cuspidale, 296, 303, 306
réelle, 289
curviligne
abscisse, 305
cuspidale
cubique, 296, 303, 306
cyclique
point, 256
cycloïde, 312
cycloïdale
courbe, 296
cylindre, 317, 337
de révolution, 316

D

décomposition
de Cartan, 287
polaire, 286
définie positive
forme quadratique, 51
Délos, 127
demi-plan, 43, 68
de Poincaré, 219, 341
demi-tour, 145
déplacement, 58, 66
hélicoïdal, 146
Desargues, 28, 47, 186, 189, 214
Descartes, 308
deuxième
cas d'égalité, 116
cas de similitude, 120
forme fondamentale, 335
théorème d'Apollonius, 279
théorème de Desargues, 214
développée, 301
d'une chaînette, 347
d'une cycloïde, 312
d'une ellipse, 311
d'une parabole, 312
diagonalisation
des matrices symétriques, 277
simultanée, 228, 271, 277, 332
diamètres
conjugués, 279
d'un cercle, 263
diédral
groupe, 161, 166, 174, 360
difféomorphisme, 95
différentielle d'une application, 95, 125, 326
dilatation, 40
dimension
d'un espace affine, 9
d'un espace projectif, 177
Dinostrate, 314
Dioclès, 312
directe
base, 69
similitude, 90, 201
direction
d'un espace affine, 9
de courbure, 337
directrice, 232, 259
discriminant, 306, 320, 346
d'une forme quadratique, 285
distance
euclidienne, 52
hyperbolique, 220
intrinsèque, 171
sur la sphère, 171
division harmonique, 199
dodécaèdre, 159, 172
double
droite, 223, 230, 247
produit vectoriel, 164
droite
à l'infini, 183, 185, 187, 249, 251, 256
affine, 12, 183, 215
contenue dans une quadrique, 283
d'Euler, 70

de Simson, 2, 117, 215, 282, 293, 309
de Steiner, 118, 282, 310
double, 223, 230, 247
normale à une courbe, 301
projective, 178, 181, 200
projective complexe, 200
projective réelle, 201
dual
d'un convexe, 170
d'un polyèdre, 156, 170
dualité
entre convexes, 170
entre polyèdres, 156
et polarité, 242
projective, 187, 208, 287
duplication
des théorèmes, 189
du cube, 127, 133, 312
Dürer, 2, 140, 159, 177, 293, 306

E

échiquier, 211
ellipse, 228, 251, 311
ellipsoïde, 255, 278, 315
elliptique
intégrale, 403
paraboloïde, 255
point, 330, 337
engendré
sous-espace affine, 13
sous-espace projectif, 181
enveloppe, 239, 293, 346
convexe, 32, 153
des droites de Simson, 309
des normales, 301
épicycloïde, 298, 309
équation
cartésienne, 34
d'une quadrique, 222
paramétrique, 34
réduite, 231
équilatère
hyperbole, 231
équipollence, 37
Erdős, 114
espace
affine, 9
affine euclidien, 52
projectif, 177
tangent, 241
vectoriel euclidien, 52
Euclide, 2, 7
euclidien
espace affine, 52
espace vectoriel, 52
Euler, 70, 124, 154, 331, 341
excentricité, 232
exinscrit
cercle, 112
exponentielle complexe, 63
extérieure
bissectrice, 80
extrema liés, 342, 346

F

face, 153
Fagnano, 114
faisceau, 104
à points bases, 105
à points limites, 106
de cercles, 103, 257, 285
de coniques, 247, 283, 288
de coniques réelles, 283
de droites, 207, 247
de quadriques, 246, 288
harmonique, 208, 259
tangent, 106
faisceaux orthogonaux, 106, 107
famille
de droites, 293
homofocale, 288
Fermat, 120, 137
Feuerbach, 124
fini
sous-groupe, 161, 173
focal
axe, 233
fonction
implicite, 291, 323, 328
scalaire de Leibniz, 68
fondamental
théorème, 48, 216
fondamentale
deuxième forme, 335
première forme, 335
football, 170
forme
bilinéaire alternée, 289
bilinéaire symétrique, 51, 265
fondamentale, 335
fondamentale (deuxième), 335
fondamentale (première), 335
polaire, 265
quadratique, 51, 265, 330
quadratique définie positive, 51
quadratique non dégénérée, 266
forme bilinéaire
alternée, 289
symétrique, 51, 265
forme quadratique
homogénéisée, 223
formule
d'Euler, 154, 341
de calcul du birapport, 197
de Frenet, 311
de Girard, 152, 341
de Taylor, 303, 330
de trigonométrie sphérique, 171
des classes, 174
foyer, 232, 258
Frenet, 311
fronce, 346
front d'onde, 302
fuseau, 151

G

Galois, 127, 131, 133, 284
Gauss, 137, 269, 332, 338, 341
géodésique, 348
géométrie hyperbolique, 220

géométrique
angle, 79
nappe, 318
géopolitique, 169
Gergonne, 113
Girard, 152, 341
glissée
symétrie, 87, 146
globale
propriété, 292, 341
Gram, 60, 72
Gram-Schmidt
procédé d'orthonormalisation de, 60, 72
grand
axe, 231
cercle, 151
Grassmann, 215
grassmannienne, 215
groupe
affine, 21, 48
affine de la droite, 41
alterné, 111, 161, 167, 173
circulaire, 203, 265
cyclique, 161, 166, 174
d'un polyèdre, 161
de Galois, 133
de Lorentz, 72
des dilatations, 40
des homographies, 191, 201
des isométries, 53
des isométries d'une figure, 110, 111, 166, 167, 307
des similitudes, 90
diédral, 161, 166, 174, 360
du cube, 168, 174
du dodécaèdre, 173, 174
du tétraèdre, 167, 174
linéaire, 22, 72
orthogonal, 60
projectif, 191, 201, 203, 244
simple, 164
symétrique, 40, 161, 167, 168, 173, 212, 213

H

Hahn, 170
harmonique
division, 199
faisceau, 208, 259
hélice circulaire, 311
hélicoïde, 344, 348
heptadécagone, 138
hexagone, 170, 220, 249, 287
hexagramme mystique, 249
Hilbert, 7, 283
Hobson, 169
holomorphe
application, 125, 201
homofocale
conique, 288
famille, 288
quadrique, 288
homogénéisée
forme quadratique, 223
homogènes
coordonnées, 192, 216, 248
homographie, 191, 244, 248
de la droite, 194, 201
homothétie, 18
Huygens, 302, 320
hyperbole, 228, 251
équilatère, 231
hyperbolique
distance, 220
géométrie, 220
paraboloïde, 255, 277, 317
plan, 220
point, 330, 337
triangle, 220
hyperboloïde, 315
à deux nappes, 255, 278
à une nappe, 255, 278, 344
de révolution, 344
hyperplan
à l'infini, 183, 195
polaire, 242
projectif, 180
tangent, 241
hypocycloïde, 298, 309
à trois rebroussements, 2, 298, 307, 309, 310

I

icosaèdre, 160
Île
de Pâques, 156
mystérieuse, 169
image d'une quadrique, 223
indépendance affine, 13, 37
indirecte
similitude, 90
inégalité
de Cauchy-Schwarz, 52, 67
de Ptolémée, 123
isopérimétrique, 292
triangulaire, 52, 67, 172
triangulaire stricte, 67, 172
triangulaire sur la sphère, 171
inertie
loi d', 269
infini, 102, 182, 184, 195, 201, 261
inflexion
point d', 304
inscrit
angle, 83
cercle, 112
intégrale elliptique, 403
intérieure
bissectrice, 80
intersection
d'un plan et d'un cône, 282
d'une droite et d'une quadrique, 224
de deux cercles, 258
de deux coniques, 247
de deux droites, 180

de deux surfaces, 291, 327
invariant anallagmatique, 123, 285
inversion, 94, 169, 203, 263
cercle d', 95
locale, 323
involution, 39, 95, 212
isocèle
triangle, 113
isométrie
affine, 52, 68
vectorielle, 52, 67
isotrope
cône, 239
vecteur, 266

J

Jacobi, 288
jardinier, 235
Jordan, 292

K

Kepler, 282

L

latitude, 169
Leibniz, 68
lemme de Schwarz, 218
lemniscate de Bernoulli, 306
liaison affine/projectif, 181, 195, 240, 250
limite
point, 106
linéaire
groupe, 22, 72
Lindeman, 133
Liouville, 94, 125
locale
inversion, 323
propriété, 292, 341
loi
d'inertie de Sylvester, 269
de Descartes, 308
de Kepler, 282
de Snell, 308
longitude, 169
Lorentz, 72
lune, 270

M

Mac Laurin, 313
Mascheroni, 138
matrice
antisymétrique, 289
d'une forme quadratique, 267, 277
symétrique, 267, 277
médiateur
hyperplan, 68
médiatrice, 68
Menelaüs, 45, 47, 249
méridien, 151, 169, 316
mesure algébrique, 26
mesurer, 78
métamorphose, 188
méthode de Gauss, 269
métrique
propriété, 255, 292, 341
Miquel, 117, 215
Möbius, 218, 347
Mohr, 138
Monge, 330
monofocale
propriété, 232
Mordell, 114
Morley, 310
mouvement
des planètes, 282
science en, 2
multiplication des théorèmes, 189
mystique
hexagramme, 249

N

Napoléon, 119
nappe
géométrique, 318
paramétrée, 318
régulière, 319
naturel, 9
néphroïde, 299, 308
Newton, 2, 46, 309
Nicomède, 313
nombre de Fermat, 137
nombres complexes
utilisation en géométrie plane, 88, 93, 110, 200
non dégénérée, 227, 266
nord, 168
normal
vecteur, 299, 331
normale à une courbe, 301
norme, 52
notations de Monge, 330
Nullstellensatz, 223, 283

O

octaèdre, 159, 167
Odyssée, 156
ombilic, 347
opération de groupe, 3, 47, 228, 244
optique, 294, 302, 308
orientation, 69
des droites de l'espace, 145, 216
orienté
angle, 2, 74, 76
orientée
aire, 150, 333
orthocentre, 70, 214
orthogonal
d'un faisceau, 106
d'un sous-espace, 52, 243
groupe, 60
orthogonale
base, 266, 267
symétrie glissée, 87
orthogonalisation, 267
simultanée, 228, 271, 277, 332
orthogonalité, 52, 266, 279
de deux cercles, 100, 210
de deux faisceaux de cercles, 106
de deux sous-espaces, 52
orthonormalisation, 60, 72
orthonormée
base, 60
osculateur
cercle, 300, 311

P

Pappus, 28, 47, 185, 213
parabole, 231, 251, 294, 312
parabolique
  antenne, 307
  point, 331, 345
paraboloïde, 315
  elliptique, 255
  hyperbolique, 255, 277, 317
parallèle, 14, 151, 169, 179, 316
parallèles
  absence de, 153, 179
  courbes, 302
  postulat des, 2, 15, 153, 219
  sous-espaces, 14
parallélogramme, 10, 35
  règle du, 10
paramétrage
  cartésien, 320
  d'un cercle, 306
  d'une conique, 247, 306
  d'une courbe, 291
  d'une courbe algébrique, 292
  d'une cubique à point double, 306
  d'une cubique cuspidale, 306
  d'une ellipse, 230
  d'une hyperbole, 279
  par la longueur d'arc, 305
paramètre, 231
paramétrée
  courbe, 291
  nappe, 318
parapluie de Whitney, 345
Pascal, 116, 121, 249, 284
pentagone, 159, 171, 172
Perec, 1
perpendiculaire commune, 161
Perrin, 215
perspective, 2, 177, 208, 211, 213, 290
petit
  axe, 231
  cercle, 151
photographie, 211, 213, 290
pinceau, 104
pivot, 119, 215
plan
  affine, 12
  hyperbolique, 220
  projectif, 178, 182
  projectif réel, 217
  tangent, 324
  tangent à une surface de révolution, 344
  tangent à une surface réglée, 344
planaire
  point, 331, 345
planète, 282
Plücker, 215, 255, 344
pluie, 2, 308
Poincaré, 219, 341
point
  à l'infini, 102, 182, 201, 203, 225, 261
  base, 105, 246
  cyclique, 256
  d'inflexion, 304
  de Fermat, 120
  de Gergonne, 113
  de rebroussement, 303
  elliptique, 330, 337
  hyperbolique, 330, 337
  limite, 106
  parabolique, 331, 345
  planaire, 331, 345
  régulier, 303, 319
  singulier, 303, 320, 324, 345
polaire
  d'un point par rapport à une conique, 242
  décomposition, 286
  forme, 265
  hyperplan, 242
  océan, 169
polarité par rapport à une quadrique, 242
pôle
  d'un hyperplan par rapport à une quadrique, 242
  d'une droite par rapport à une conique, 242
  d'une inversion, 94
  nord, 168
polyèdre, 153
  dual, 156
  platonicien, 2
  régulier, 157
polygone régulier, 127, 134, 137, 156
position
  d'une courbe par rapport à sa tangente, 303
  d'une ellipse par rapport à sa tangente, 230
  d'une parabole par rapport à sa tangente, 280
  d'une surface par rapport à son plan tangent, 329, 337
  générale, 327
postulat des parallèles, 2, 15, 153, 219
premier
  cas d'égalité, 116
  cas de similitude, 120
  théorème d'Apollonius, 279
principale
  courbure, 337
principe
  de conjugaison, 23
  de Huygens, 302, 320
problème de Fagnano, 114
produit
  scalaire, 51, 255, 265
  vectoriel, 147
projectif
  espace, 177
  groupe, 191, 201, 244
  hyperplan, 180

lecteur, 223
plan, 178, 182
repère, 192, 216
sous-espace, 179
projection
affine, 38
stéréographique, 168, 173, 200
projective
complétion, 183, 195, 200, 240, 250
conique, 239
droite, 178, 181, 200
dualité, 187, 208, 287
lectrice, 304
quadrique, 239
propre
quadrique affine, 223
quadrique projective, 239
propriété
affine d'une courbe, 292, 304
bifocale, 233
globale, 292, 341
locale, 292, 341
métrique, 255, 292, 341
monofocale, 232
tangentielle des coniques, 235, 239, 287, 294
pseudosphère, 347
Ptolémée, 123
puissance
d'un point par rapport à un cercle, 100
d'une inversion, 94
pyramide, 156, 166
Pythagore, 112

Q

quadratique
forme, 51, 265, 330
quadratrice de Dinostrate, 314
quadrature du cercle, 127, 133, 314
quadrilatère complet, 46, 70
quadrique, 222, 315
à l'infini, 283
à centre, 227
affine, 223, 278
affine propre, 223
dégénérée d'un faisceau, 247
en dimension 3, 278
homofocale, 288
projective, 239
projective propre, 239
réelle, 278, 283
quaternions, 174
queue d'aronde, 320

R

radical
axe, 103, 121, 132, 257, 264
rang
d'une forme quadratique, 268, 277
d'une matrice antisymétrique, 289
rapport
d'une homothétie, 18
d'une similitude, 89
rayon
de courbure, 300
du cercle circonscrit, 111, 124
du cercle inscrit, 124
rebroussement
point de, 303
réduite
équation, 231
réelle
conique, 289
cubique, 289
quadrique, 278, 283
réflexion, 54, 68, 263
règle, 127, 213
à calcul, 1
du parallélogramme, 10
réglée
surface, 277, 317, 344
régulier
point, 303, 319
polyèdre, 157
polygone, 156
régulière
courbe, 303
nappe, 319
rein, 299
relation
d'Euler, 124
métrique dans le triangle, 111
repère
affine, 13
projectif, 192, 216
révolution, 316
Riemann, 200, 341
rotation
dans l'espace, 143
plane, 63, 87

S

salle de bain, 170
Schmidt, 60, 72
Schwarz, 52, 67, 218
section conique, 282
selle
de cheval, 317, 330
de singe, 345
séparation, 169
signature d'une forme quadratique, 269
similitude
cas de, 120
directe, 90, 201
indirecte, 90
vectorielle, 89
simple
groupe, 164
simplicité de $O^+(3)$, 164
Simson, 117
singulier
point, 303, 320, 324, 345
sinus, 64
Snell, 308
soleil, 169, 270, 293, 308
somme des angles d'un triangle, 82, 153, 220
sommet, 154, 292, 345
d'une parabole, 231
sous-espace
affine, 11
engendré, 13, 181
projectif, 179
sous-espaces parallèles, 14

sous-groupe fini de $O^+(3)$, 160, 173
sphère, 151, 200, 337
de Riemann, 200
sphérique
triangle, 151, 171
trigonométrie, 171
Spilett, 169
Steiner, 118, 124, 248
stéréographique
projection, 168, 173, 200
structure
des isométries, 55
transport de, 11, 75
support d'une nappe géométrique, 318
surface, 318
de révolution, 316, 343
réglée, 277, 317, 344
Sylvester, 269
symétrie, 39
glissée, 87, 146
orthogonale, 54
symétrique
forme bilinéaire, 51, 265
groupe, 40, 161, 167, 168, 173, 212, 213
matrice, 267, 277

T

tangent
espace, 241
hyperplan, 241
plan, 324
vecteur, 303
tangente
à une conique, 226, 287
à une conique à centre, 238
à une courbe, 293, 303, 325
à une parabole, 237
à une quadrique, 225
application, 326
tasse de café, 293
Taylor, 303, 330
Terre, 2, 153, 169, 213
tétraèdre
quelconque, 41, 167
régulier, 158, 166
Thalès, 2, 27, 39, 209
theorema egregium, 338
théorème
d'Apollonius, 279
d'Erdős et Mordell, 114
d'Euler, 332, 336
d'inversion locale, 323
de Bézout, 247
de Brianchon, 287
de Ceva, 46
de Chasles, 289
de Chasles-Steiner, 248
de Desargues, 28, 47, 186, 189
de Desargues (deuxième), 214
de Feuerbach, 2, 124
de Gauss, 137
de Gauss-Bonnet, 341
de Hahn-Banach, 170
de Jacobi, 288
de Jordan, 292
de Lindeman, 133
de Liouville, 94, 125
de Menelaüs, 45, 47, 121, 249
de Miquel, 117, 215
de Mohr-Mascheroni, 138
de Pappus, 28, 47, 185, 213, 284
de Pascal, 116, 121, 249, 284
de Pythagore, 112
de Thalès, 2, 27, 39, 209
de Wantzel, 131
de Weierstrass, 371
de Witt, 272
des fonctions implicites, 291, 323, 328
des milieux, 36
des quatre sommets, 292
des six birapports de Perrin, 214
des zéros, 283
fondamental, 48, 216
remarquable de Gauss, 338
théorie
de Galois, 127, 131, 133, 284
topologie
de $O^+(3)$, 175, 218
de l'espace projectif, 178
du groupe linéaire, 72
du groupe orthogonal, 61
du plan projectif réel, 217
tore de révolution, 316, 347
torsion, 311
tractrice, 347
translation, 18
transport
de structure, 11, 75
par conjugaison, 23
triangle
hyperbolique, 220
sphérique, 151, 171
trigonométrie
plane, 111
sphérique, 171
trissection de l'angle, 127, 133, 313, 314
trissectrice de Mac Laurin, 313
troisième cas d'égalité, 116
type d'une conique, 231

U

utilisation des nombres complexes, 66, 88, 93, 110, 200, 256

V

variété, 341
vecteur, 37
isotrope, 266
normal, 299, 331
tangent, 303
vecteurs orthogonaux, 52, 266
vectorialisé, 11
Vinci, 159, 170

vissage, 146
Vosges, 345
vraie géométrie, 2

W

Wantzel, 131
Weierstrass, 371
Whitney, 345
Witt, 272

X

x (axe des), 249

Y

y (axe des), 249

Z

zeugme, 215